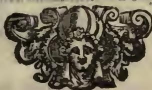
GEOMETRIA APPLICATIONVM DEFICIENTIVM FIGVRA DATA SPECIE.

AVCTORE
PETRO PAVLO CARAVAGGIO
MEDIOLANENSI
In Palatina Academia Mathematicarum ſcientiarum profeſſore.



MEDIOLANI, M. DC. LIX.
Ex Typographia Archiepiſcopali,
Per Bartholomæum Bidellium.

Ad Adm.R.D.Cæsarem Zoccum vt videat,& vbi nihil obstet, probet Inquisitor Mediolani.

OPus hoc, cui inscribitur Geometria applicationum deficientium &c. Auctore Domino Petro Paulo Carauaggio Mediolanensi in Palatina Academia meritissimo; ac peritissimo Mathematicarum professore, Ego P. Cæsar Zocchus Rector S. Ambrosij in Solariolo de mandato Reuerendissimi Inquisitoris perlegi, & typis dignum iudicaui. In quorum fidem.

Ità est P. Cæsar Zocchus qui de mandato vt sup.

Imprimatur Fr. Petrus Hyacinthus Donnellius Magister, & Inquisitor Mediolani.

Io. Paulus Mazuchellus pro Illustrissimo, & Reuerendiss. D. D. Archiepiscopo.

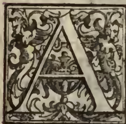
Franciscus Arbona pro Excellentissimo Senatu.



EXCELLENTISSIMO SENATVI MEDIOLANENSI.



PETRVS PAVLVS CARAVAGGIVS F.



VT me ſuſcepti operis amor fallit, aut veſtro Ampliſſimi Patres iuditio, ob delatum publicè Mathematicas profitendi munus nimium mihi blanditus inani perſuaſione ducor, vt credam hæc qualiacunq; non eſſe prorſus indigna, quæ ſacrario veſtro ſiſtantur: Nam cum vnica mihi cura ſit, relictis protritis, ac peruulgatis ea indagare, quæ miſero ſcientiarum fato in Veterum monumentis deſiderantur, & in quibus præclara Illuſtrium huius æui Mathematicorum ingenia ſe exercuiſſe non noui; Et

licet

licet eorum decus omne aßequi non potuerim, non improbè tamen ſperare poßum futurum hic aliquid, quod ſtudioſorum vota non in totum eludat; Nam vt alia omittam inſtitutus labor proderit ſaltem, ad clariorem reddendum vſum inſtaurata à ſummis viris antiquorum Analyſis. Hæc certa, & indubitata ratiocinandi lex nos in ipſa Mathematicarum penetralia inducit, ac ſublimioribus commentationibus viam aperit: quodq; caput eſt nouarum propoſitionum inueniendarum cupidos Geometrarum libros verſandi tædio, ac veluti ergaſtulo liberat.

Has commentationes publici iuris facere in veſtro ampliſſimo nomine auſus ſum. Nam, cum vita vltrà ſtatutos æui terminos prorogari non poſſit adnitendum eſt, vt aliquid ſuperſit, propter quod nos vixiſſe, nec pudeat, nec pœniteat. Neque felicioribus auſpicijs hæ facultates principes publico vſui inſeruire poßunt, aut debent. Id vnicum pignus erit obſeruantiæ meæ, aut potius pietatis erga vos teſtandæ, vt omittam veſtra non in publicam modo, ſed in rem literariam ingentia merita, qui ad ornandas, atq; augendas diſciplinas, earumq; cultores fouendos nati eſtis. Ita munus veſtrum vobis redditum eo, apud quos natum, atq; eductum; ſimul Deum veneror, vt diu talia appendere vobis poſſim, ac perpetuæ veſtræ felicitatis voto damnari. Valete.

ISAGOGE.

ISAGOGE.



ARS ea Matheseos, quæ iactis communium Elementorum fundamentis sublimior, ac plena Maiestatis exurgit, & prope perfecti operis fastigium extollit; dum scilicet vim, & facultatem vnicuiq; subministrat in Geometricis, atq; Arithmeticis quæcunq; Problemata inueniendi, &, teste Pappo, vocatur locus resolutus, inuenta, ac comparata in superbi illius Problematis gratiã, NVLLVM PROBLEMA NON SOLVERE, deficiens, & quodamodo manca esset, nisi quando Problemata fieri possent, determinatio indicaret; siquidem omnis cura, atq; opera frustra esset, si ea, quæ inueniri non possunt, inuestigarentur.

Cum igitur locorum variæ sint species; alij enim plani, alij solidi, alij lineares dicuntur; & vniuscuiusq; speciei gradum determinet applicatio magnitudinis datæ magnitudini cum defectu simili figuræ datæ, quæ contineat magnitudinem applicatæ magnitudini homogeneam. Plani enim loci gradum determinat applicatio ad datam rectam lineam plani deficientis parallelogrammo simili dato; solidi loci gradum determinat applicatio solidi ad datam lineam, vel planum datum, cum defectu parallelepipedi similis dato; Linearium verò locorum maiorem lineæ virtutem ostendit, quo altius denominatur magnitudo applicata cũ homogeneo defectu; quam denominationem nos ex Arithmeticis in Geometriam transferemus homoge-

neis in eodem gradu constitutis; latere scilicet cum radice; plano cum quadrato; solido cum cubo; plano plano, cum quadrato quadrato; plano solido, cum quadrato cubo; solido solido, cum cubo cubo; & sic vlterius procedendo; seruata Analystarum Methodo Diophantea, quod antiquos fecisse non noui, aut si factum est misero scientiarum fato cum pluribus alijs est deperditum; ea enim, quæ ex ipsorum monumentis ad nos peruenerunt ad Geometriam spectantia in trina solidi dimensione terminantur, non altius ascendendo. Quamobrem plani tantum ad datam lineam applicatio deficientis parallelogrāmo simili dato, & solidi ad datam lineam applicatio cum defectu parallelepipedi similis dato determinata in Antiquorum monumentis reperitur. Prima in datæ lineæ bisectione maxima demonstratur ab Euclide lib. 6. prop. 27.; & secunda in trisectione ab Eutocio in Archimedē de Sphera, & Cylindro, prop. 3., & à Bonauentura Caualerio; sed cum hic vsus sit methodo suæ Geometriæ indiuisibilibus continuatæ; & Eutocius id præstiterit ope conicarum sectionum, quarum vsus nonnullis nō arridet, vt Geometricus; ideò nos addemus ijs, qui nos præcesserunt, vt hanc etiam solidi applicationem in trisectione datæ lineæ maximam Geometricè determinemus, nullis adhibitis ad demonstrationem Conicis sectionibus, sed solis Euclideis postulatis, adhibita scilicet tantum linea, & circulo; in hoc Geometriam promouentes, amplius illam promoturi in applicationibus altiorum graduum, quod in ipsis maximum sit determinando; demonstrantes quemlibet

bet gradum, vt maxima fiat applicatio tot requirere datæ magnitudinis sectiones, quotus ipse est in ordine graduum; ita vt plano plani, quod quartum in magnitudinum serie gradum obtinet, applicatio cum homogeneo defectu, vt maxima fit, requirat magnitudinem, cui applicatur quadrifariam secari: Plano solidi verò applicatio cum homogeneo defectu requirat quintufariam secari, cum plano solidum quintum obtineat gradum in scala magnitudinum, & sic in infinitum. Et tunc cum magnitudo lineæ applicabitur accidet maxima applicatio ad vnam dictarum partium; cum verò applicabitur gradui altiori, tunc maxima applicatio continget in tot partibus datæ magnitudinis, cui fit applicatio, quota ipsa est in ordine graduum, diuisæ in tot partes, quota est applicanda magnitudo in ordine graduum; idest magnitudinis, cui fit applicatio partes denominabit numerus graduum magnitudlnis applicandæ; numerabit verò numerus graduum magnitudinis, cui fit applicatio. Hoc locupletemus exemplo. Applicandum sit solido solidum plano plano, cum defectu cubi cubi, inuestigandumq; quodnam maximum futurum sit, quod applicari possit, exurget illud fore omnium maximum, quod diuiso plano plano in sex partes applicabitur ipsius plano plani quatuor partibus; cum applicandum sit solido solidum, quod in ordine magnitudinum sextum gradum obtinet, & plano planum, cui fit applicatio in ordine magnitudinum obtineat quartum gradum, & reliquum occupabit defectus figuræ homogeneæ similis datæ seruato ordine sequenti.

Maximum planum,quod applicatur datæ lineæ deficiens parallelogrammo ſimili dato eſt id, quod applicatur dimidio datę lineæ;parallelogrammum ſimile dato deficiens adiacet alteri dimidio.

Maximum ſolidum, quod applicatur datæ lineæ deficiens ſolido ſimili dato eſt id, quod applicatur datæ lineæ tertiæ parti; ſolidum ſimile dato deficiens adiacet reliquis duabus tertijs partibus.

Maximum ſolidum, quod applicatur dato plano deficiens ſolido ſimili dato eſt id, quod applicatur dati plani duabus ex tribus partibus; & ſolidum ſimile dato deficiens adiacet reliquæ tertiæ parti.

Maximum plano planum, quod applicatur datæ lineæ deficiens plano plano ſimili dato eſt id, quod applicatur datæ lineæ parti quartæ; & plano planum ſimile dato deficiens adiacet reliquis tribus ex quatuor partibus.

Maximum plano planum, quod applicatur dato plano deficiens plano plano ſimili dato eſt id, quod applicatur dati plani duabus ex quatuor partibus, ideſt dimidio; & plano planum ſimile dato deficiens adiacet reliquis duabus ex quatuor partibus, ideſt dimidio.

Maximum plano planum, quod applicatur dato ſolido deficiens plano plano ſimili dato eſt id, quod applicatur dati ſolidi tribus ex quatuor partibus; & plano planum ſimile dato deficiens adiacet reliquæ quartæ parti.

Maximum plano ſolidum, quod applicatur datæ lineæ deficiens plano ſolido ſimili dato eſt id, quod applicatur datæ lineæ quintæ parti; & plano ſolidum

ſimile

ſimile dato deficiens adiacet reliquis quatuor ex quinque partibus.

Maximum plano ſolidum, quod applicatur dato plano deficiens plano ſolido ſimili dato eſt id, quod applicatur dati plani duabus ex quinque partibus; & plano ſolidum ſimile dato deficiens adiacet reliquis tribus ex quinque partibus.

Maximum plano ſolidum, quod applicatur dato ſolido deficiens plano ſolido ſimili dato eſt id, quod applicatur dati ſolidi tribus ex quinq; partibus; & plano ſolidum ſimile dato deficiens adiacet reliquis duabus ex quinque partibus.

Maximum plano ſolidum, quod applicatur dato plano plano deficiens plano ſolido ſimili dato eſt id, quod applicatur dati plano plani quatuor ex quinq; partibus; & plano ſolidum ſimile dato deficiens adiacet reliquæ quintæ parti.

Et ſic procedendo.

Sed cum ſuperius me ex Arithmeticis in Geometriam magnitudinum denominationes transferre dixerim, qua lege id faciam, quomodo Arithmeticam Geometriæ conciliem Iſagogis loco docebo.

Apud Arithmeticos poſita numerorum continue proportionalium ſerie ab vnitate incipientium, primus ab vnitate dicitur radix, ſecundus quadratus, tertius cubus, quartus quadrato quadratus, quintus quadrato cubus, ſextus cubo cubus, & ſic in infinitum, ſeruata denominandi Methodo Diophantea in exponentium additione. Non incongruum igitur erit ſimiliter in Geometria, poſita linearum ſerie proportionali-

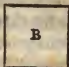
tionaliter continue procedentium, si prima ponatur loco vnitatis, secunda dicatur Analoga radici, tertia quadrato, quarta cubo, quinta quadrato quadrato, & sic vlterius procedendo. Quia vt quadratum primæ ad quadratum secundæ, ita prima ad tertiam; & vt cubus primæ ad cubum secundæ, ita prima ad quartam; & vt quadrato quadratum primæ ad quadrato quadratum secundæ, ita prima ad quintam; & eadem Methodo vlterius procedendo. Non aliter, ac numerorum quadrata metitur vnitatis quadratum, toties, quot vnitates sunt in illo proportionali numero, qui tertius est incipiendo ab vnitate, & continuando rationem vnitatis ad latus quadrati; seu ad quem vnitas habet duplicatam rationem eius, quam habet ad latus quadrati. Numerorum cubos metitur vnitatis cubus toties, quot vnitates sunt in illo proportionali numero, qui quartus est, incipiendo ab vnitate, & continuando rationem vnitatis ad latus cubi, seu ad quem vnitas habet triplicatam rationem eius, quam habet ad latus cubi. Numerorum quadrato quadrata metitur vnitatis quadrato quadratum, toties, quot vnitates sunt in illo proportionali numero, qui quintus est, incipiendo ab vnitate, & continuando rationem vnitatis ad latus quadrato quadrati; seu ad quem vnitas habet quadruplicatam rationem eius, quam habet ad latus quadrato quadrati; & sic deinceps.

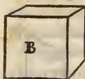
A	B	C	D	E

Posita igitur quotcunq; linearum continuè proportionalium serie A B C D E, & prima gerat vicem vnitatis, reliquæ reliquis magnitudinibus homo-

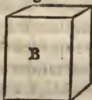
homologæ erunt; euadet igitur reliquarum magnitudinum latus, seu radix B, cuius quadrato homologa erit C, & cubo D, & quadrato quadrato E.

Effingatur enim ex ipsa B quadratum; vt A ad C, ita erit A quadratum ad B quadratum; facto deinde B cubo, erit vt A ad D, ita A cubus ad B cubum; seu, vt B ad C,

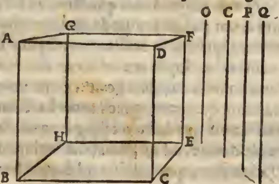




ita B quadratum ad B cubum; & similiter B cubus erit ad B quadrato quadratum, vt C ad D, seu, vt A ad B; si verò B cubi altitudo formetur in ratione A ad B ortum erit parallelepipedum, quod refert magnitudinem quadrato quadrati, quale est parallelepipedum B; si huius iterum vltimi parallelepipedi altitudo ad aliam altitudinem referatur, manente eadem basi, in eadem ratione A ad B exurget quadrato cubus &c.; & hæ magnitudines augebuntur, si ratio A ad B erit minoris ad maius, & minuentur si maioris, ad minus, vt patet.

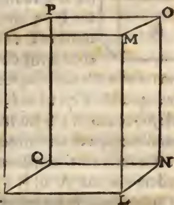


Sit igitur data quæcunq; recta C, ex qua effingendum sit quadrato quadratum; constituẽda prius erit aliqua linea, quæ se habeat loco vnitatis; sit v. g. O, & sicuti O se habet ad



ad C, ita C fiat ad aliam v. g. P, ex qua vti altitudine constituatur parallelepipedum habens pro base ipsius C quadratum; hoc parallelepipedum refert quadrato quadratum quęsitū, quale est parallelepidedum A B C D E F G H, cuius basis est quadratū B E ex latere B C equale lateri C, & altitudo B A, ad quam C habet eam rationem, quam habet O ad C.

Si verò sit constituendus quadrato cubus fiet parallelepipedum I K L M N O P Q, cuius basis sit quadratum K N æquale quadrato lineæ C, & altitudo sit I K, ad quam B A altitudo scilicet quadrato quadrati habeat rationem, quam habet O ad C, seu ad quam C habeat duplicatam rationem eius, quam habet O ad C, idest sint continuè proportionales O & C, & B A, & I K: eodem modo de reliquis denominatis magnitudinibus erit differendum.



Quo circa quadrato quadrata ex inequalibus lineis orta erunt parallelepipeda illa, quæ super datarum linearum quadratis basibus constituta habebunt altitudines in duplicata ratione datarum linearum: Cum enim linea, quæ gerit vicem vnitatis ad efformandum quadrato quadratum ex dato latere, super dati lateris quadratum effingat parallelepīpedū, cum ea altitudine, ad quam habeat rationem, quæ sit duplicata eius, quam habet ad datum latus; habebit ad

vtriusq;

vtriusq; quadrato quadrati altitudinem duplicatam rationem eius, quam habet ad ipsarum basium latera; quare quadrato quadratorum altitudines inter se erunt in duplicata ratione laterum suarum basium. Si enim sint duæ series continue proportionalium ab eadem quantitate incipientium, habebit tertia primæ seriei ad tertiam secundæ seriei duplicatam rationem eius, quam habet secunda primæ seriei ad secundam secundæ seriei; vt in lẽmate secundo demonstrabimus.

Similiter quadrato cubi ex inæqualibus lineis orti erunt parallelepipeda illa, quæ super datarum linearum quadratis basibus constituta habebunt altitudines in triplicata ratione datarum linearum; nam cum linea, quæ gerit vicem vnitatis, ad efformandum quadrato Cubum ex dato latere, super dati lateris quadratum effingat parallelepipedum cum ea altitudine, ad quam habeat rationem, quæ sit triplicata eius, quam habet ad datum latus, habebit ad vtriusq; quadrati Cubi altitudinem triplicatam rationem eius, quam habet ad ipsarum basium latera; quare quadrato Cuborum altitudines inter se erunt in triplicata ratione laterum suarum basium. Si enim sint duæ series continuè proportionalium ab eadem quantitate incipientium, habebit quarta primæ seriei ad quartam secundæ seriei triplicatam rationem eius, quam habet secunda primæ seriei ad secundam secundæ seriei, vt in lemmate secundo demonstrabimus.

Et ex his facili negotio apparet similia plano plana esse illa parallelepipeda, quæ super similibus basibus cõstituta, habent altitudines in duplicata ratione late-

rum homologorum similiũ basium;& similia plano solida esse illa parallelepipeda, quæ super similibus basibus constituta habent altitudines in triplicata ratione laterum homologorũ similium basium;& semper iuxta numerũ graduum, ad quem ascendit magnitudo denominata vltra solidum, totuplicem esse rationem altitudinum rationis laterum homologorum similium planorum, super quibus cõstructa erunt parallelepipeda.

His præmissis, vt transeamus ad applicationes magnitudinis magnitudini cum homogeneo defectu simili figuræ datæ, hoc nihil aliud erit, quam ita secare magnitudinem datam, cui fieri debet applicatio, vt si ex altero segmento gignatur figura similis datæ, quæ defectiua sit, quod fit ex ortiuo latere in reliquum datæ magnitudinis segmentum æquetur applicandæ magnitudini; ortiui autem lateris nomine non tantum lineam, sed etiã superficiem intelligo. Si enim datæ lineæ applicandum sit solidũ solido æquale deficiens Cubo, vel quocunq; solido parallelepipedo simili dato, hoc nihil aliud erit, quam ita datam lineam secare, vt si ex altera ipsius parte effingatur parallelepipedum simile dato, quod ex altera effícti parallelepipedi superficie, tanquam basi, & reliquo datæ lineæ segmento tanquam altitudine effingi poterit parallelepipedum, æquetur solido, dato; & in huiuscemodi casu latus exurgens est superficies. Si vero dato plano applicandum esset solidum solido æquale deficiens Cubo, vel quocunque parallelepipedo simili dato; ita secandum esset planum, vt si ex latere alterius segmenti in quadratum efformati, vt effingatur Cubus, vel in

paralle-

parallelogrammum ſimile dato, vt ductum in altitudinem ſimilem datæ exurgat parallelepipedum ſimile dato, quod ex hac altitudine in reliquum plani efficietur ſolidum ſit æquale ſolido dato, & in huiuſcemodi caſibus latus exurgens eſt linea.

Cum autem data magnitudo ita ſecari poſſit, vt ſi ex altero ſegmento effingatur figura ſimilis datæ, quod ex ortiuo huiuſce figuræ latere fit in reliquum magnitudinis ſegmentum ſit omnium maximum; noſtrum obiectum erit datæ magnitudinis ſectionem determinare, idq; Geometricè.

Et quia nouam mihi videor eſſe viam ingreſſus operæ pretium me facturum exiſtimaui ſi non ſolum inuenta demonſtrarem Theoremata, ſed Methodum etiam, qua vſus ſum in inueniendo adderem, vt in commune commodum hæc veluti exempla prodirent ad facultatem vnicuiq; comparandam ſimilia, & ſubtiliora excogitandi, ac demonſtrandi; quare in ſingulis propoſitionibus præmittam prius Analyſim Zeteticam, ſeu inuentricem, qua determinatam ſectionem inueni, vbi figura deficiens ſumetur e ſerie ſcalarium magnitudinum; nam planum deficiens erit quadratum, ſolidum deficiens Cubus, plano planum deficiens quadrato quadratum, & ſic de cæteris; cum vt æqualitas laterum in proportionem transferatur ſolum maior opera non peritia requiratur; huic Subdam Poriſticen, qua examinetur inuentum poſito ſolido deficienti ſolido quocunq; ſimili dato, quod tandem ſequetur demonſtratio Synthetica circa ipſas Geometricas magnitudines.

Et quia vnicuiq; lateri, aut figuræ poteſt dari linea homologa; ſi conſtituatur linea, quæ ſe habeat loco vnitatis, poterit etiam dari homologa producto ex altero datæ magnitudinis ſegmento in homologam lateri ortiuo ex applicatione deficientis figuræ reliquo ſegmento, quæ, vt ſit omnium maxima, determinanda erit datæ magnitudinis ſectio, quam determinabimus adhibitis in demonſtrationem, non vt ſuperius ipſis magnitudinibus, ſed lineis proportionalibus, quæ ipſis magnitudinibus homologæ ſint; ita vt in id recidat hęc Methodus, vt poſita linea non ſecta hæc ſe habeat loco vnitatis, & ſimilis ſit ei, quæ ab Euclide dicitur rationalis; cui, vel cuius poteſtati reliquæ comparentur, & magnitudo, cui fieri debet applicatio ita ſecetur, vt ſi alterum ſegmentum fiat ad aliud, vt non ſectæ gradus homogeneus lateri, quod reſultat ex effectione figuræ ſimilis datæ ab altero ſegmento in vnum effingendæ figuræ latus efformato ad idem latus, id, quod reſultat ſit omnium maximum.

Id dilucidemus exemplis. Sit docendum cum Euclide lib. 6. propoſitione 27., maximum planum, quod applicari poſſit lateri dato deficiens quadrato eſſe id, quod ad dimidium dati lateris applicatur; quod idem eſt, ac rectangulum, quod fit ſub dati lateris ſegmentis æqualibus eſſe omnium maximum. Iuxta hanc methodum in id recidet, vt data quadam non ſecta datum latus ea lege ſecetur, vt ſi fiat, vt non ſecta ad vnum ſegmentum, ita alterum ſegmentum ad aliud, id demonſtretur omnium maximum, quod exurget ſi datum latus bifariam ſecetur.

Sit

Sit quærendum maximum solidum, quod applicari possit dato lateri cum defectu Cubi, quod esse id, quod applicatur tertiæ parti dati lateris demonstrat Eutocius in Archimedem de Sphera, & Cylindro lib. 2. propositione 3., vbi docet, proposita linea, eaq; secta, ita vt partes sint in ratione dupla, parallelepipedum constructum base quadrato maioris partis, & altitudine minori portione, maximum esse omnium, quæ pariter confici possint ex alia quacunq; sectione eiusdem lineæ. Hac autem methodo in id recidet, vt posita linea non secta datum latus ita secetur, vt si fiat, vt non secta ad alterum segmentum, ita alterius segmenti quadratum ad aliud, hoc doceatur esse omnium maximum, quando segmentum, ex quo fit quadratum est duplum alterius segmenti, vel alterum segmentum est æquale tertiæ parti dati lateris; & vt etiam omnia ad lineas tantum reducantur, iuxta hanc methodum, in hanc formam exprimi poterit. Datis duabus rectis lineis, quarum altera sit non secta, altera vero secta, & alterum segmentum sectæ habeat ad aliam lineam rationem duplicatam eius, quam habet non secta ad alterum segmentum, hanc lineam fore omnium maximam, quando segmentum, ad quod refertur non secta erit æquale duabus tertijs partibus datę rectę.

Sit quærendum maximum solidum, quod applicari possit dato plano cum defectu Cubi, quod à nobis demonstrabitur esse id, quod applicatur duabus tertijs partibus dati plani, idq; Geometricè; vbi, quia defectus debet assimilari Cubo, necesse erit alterum dati plani segmentum in quadratum effingi: quare in id recidet

cidet hæc methodus, vt si fiat, vt data non secta ad similem lateri quadrati dati segmenti, ita similis residuo plani ad aliam, quæ similitudo sit respectu datæ non sectæ vti rationalis; & erit quæ exurget quarto loco proportionalis posita Proportionalium prima non secta, secunda similis lateri quadrati, tertia similis longitudini, quæ oritur ex applicatione reliqui segmenti ad idem latus.

Sed ad hæc dilucidanda non inutile erit pauca subnectere; hoc est cum superius dixerimus scalaribus magnitudinibus dari posse proportionales rectas lineas homologas in serie continuè proportionalium, quarum prima gerat vicem vnitatis, secunda lateris, seu radicis; hinc colligi posse magnitudinum additioni, aut subductioni respondere solam linearum homologarum additionem, & subductionem, & magnitudinum ductui, & applicationi respondere solam cuiusdam proportionalis inuentionem, quæ duas datas, vti tertia sequatur, aut tres datas vti quarta. Cum enim numerum per numerum multiplicare idem sit, ac reperire numerum, ad quem multiplicatus habeat eam rationem, quam habet vnitas ad multiplicantem; & id circò quatuor fiant numeri proportionales, vnitas, & multiplicans, multiplicatus, & productus; similiter cum ducenda sit Geometrica magnitudo in magnitudinem, & Geometricis magnitudinibus possint exhiberi lineæ homologæ; si determinetur quædam linea, quæ habeat se loco vnitatis, & ponatur prima proportionalium, & secunda proportionalium sit linea alteri magnitudinum ducendarum homologa; & fiat, vt linea

nea

nea posita loco vnitatis ad hanc secundam, ita altera linea homologa alteri Geometricæ magnitudini ad aliam; hæc vltimo loco inuenta similis erit ei, quod fit ductis inter se dictis magnitudinibus. Id doceamus exemplo. Sit ducendum B quadratum in C Cubum; posita linea A quæ se hebeat loco vnitatis, si fiat, vt A ad B latus quadrati ita B ad aliam v. g. D, erit D similis B quadrato; item si fiat, vt A ad C, ita C ad E, & E ad F, erit F similis C Cubo; si tandem fiat, vt A ad D ita F ad aliam, quæ sit G, erit G similis producto ex B quadrato in C Cubum.

In diuisionibus verò numerorum cum sit vt diuisor ad vnitatem, ita diuidendus ad quotientem, vel vt diuisor ad diuidendum, ita vnitas ad quotum. Similiter in applicationibus magnitudinum, cum possint, & applicandis, & ijs, quibus fit applicatio magnitudinibus assignari lineæ homologæ, posita linea rationali, quæ vicem gerat vnitatis; si fiat, vt similis ei, cui fieri debet applicatio, ad eam, quæ similis est applicandæ; ita linea, quæ se habet loco vnitatis ad aliam, exurget similis quoto. Sit applicandus B Cubus C quadrato. Posita linea A pro vnitate, si fiat, vt A ad B, ita B ad D, & D ad E; erit E similis B Cubo; si verò fiat, vt A ad C ita C ad F; erit F similis C quadrato. Si igitur fiat vt F ad E, ita A ad aliam, hæc erit similis latitudini oriundæ ex applicatione B Cubi ad C quadratum.

Et radicum extractioni, quæ quædam species est diuisionis, respondebit inuentio medio loco proportionalium inter duas, quarum prima sit loco vnitatis;

& altera homologa ſit magnitudini, cuius radix ſit inuenienda; radix enim quadrati erit medio loco proportionalis, & radix Cubi erit prima duarum medio loco proportionalium, & radix quadrato quadrati erit prima trium medio loco proportionalium, & ſic de cæteris.

Et hæc mihi Elementa non ſcribenti ad intelligenda ea, quæ ſubſequentur ſatis perſpicuè dicta ſint ijs, qui iam non Elementorum tantum, ſed Geometricæ Analyſis fundamenta ſibi ſubſtruxerunt; cum horum rudibus, hæc futura ſint obſcuriora. Quare ad opus propoſitum Geometrica methodo proſequendum proponam terminorum definitiones, quæ ex hoc Iſagogico prolegomene manifeſtæ ſatis erunt.



DEFINITIONES.

I.



Lano plana ſimilia voco parallelepipeda illa, quæ ſuper ſimilibus parallelogrammis baſibus conſtituta habent altitudines in duplicata ratione homologorum laterum ſimilium baſium, vel in ratione baſium, vel in ratione ſubſeſquiplicata ſimilium ſolidorum.

II.

Plano ſolida ſimilia voco parallelepipeda illa, quæ ſuper ſimilibus parallelogrammis baſibus conſtituta habent altitudines in triplicata ratione homologorum laterum ſimilium baſium, vel ſeſquiplicata ſimilium baſinm, vel in ratione ſimilium ſolidorum ſuper ſimilibus baſibus conſtitutorum, vel in ratione ſubſeſquitriplicata ſimilium plano planorum.

III.

Solido ſolida ſimilia voco parallelepipeda illa, quæ ſuper ſimilibus parallelogrammis baſibus conſtituta habent altitudines in quadruplicata ratione laterum homologorum ſimilium

basium, vel duplicatam basium, vel sesquitriplicatam similium solidorum super similibus basibus constitutorum, vel in ratione similium plano planorum super similibus basibus constitutorum, vel in ratione subsesquiquadruplicata similium plano solidorum.

Et ex his patent altiorum magnitudinum similium definitiones.

IV.

Linea cui, vel cuius potestati reliquas magnitudines comparabo à me vocabitur rationalis.

V.

Si fuerint quatuor magnitudines continuè proportionales, ratio primæ ad quartam à me dicitur sesquiplicata eius, quam habet prima ad tertiam; & ratio primæ ad tertiam à me dicitur subsesquiplicata eius, quam habet prima ad quartam; similiter si fuerint quinq; continuè proportionales, ratio primæ ad quintam à me dicitur sesquitriplicata eius, quam habet prima ad quartam, & ratio primæ ad quartam subsesquitriplicata eius, quam habet prima ad quintam, & sic de cæteris.

LEMMATA.

LEMMA I.

Si prima magnitudo ad ſecundam habuerit maiorem rationem, quam tertia ad quartam, erit factum ſub prima, & quarta maius facto ſub ſecunda, & tertia.



Abeat prima A ad ſecundam B maiorem rationem, quam tertia C ad quartam D. Dico factũ ex A in D ſuperare factum ex B in C. Fiat, vt A ad B, ita C ad E, habebit C ad E maiorem rationem, quam ad D; ergo D ſuperabit E; ergo factum ex A in D ſuperabit factum ex A in E; ſed factum ex A in E eſt æquale facto ex B in C; ergo factum ex A in D ſuperat factum ex B in C; & hoc argumentum ſemper eadem vi concludet ſi A, & B ſint lineæ, C verò, & D ſint plana, vel corpora, vel plano plana, aut è contra.

A
B
C
D
E

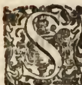
Est Pappi

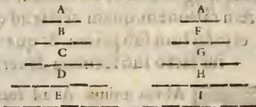
LEMMA II.

Si ſint duæ ſeries continuè proportionalium ab eadem magnitudine incipientium, habebit tertia primæ ſeriei ad tertiam ſecundæ ſeriei duplicatam rationem eius, quam habet ſecunda primæ ſeriei ad ſecundam ſe-

Est Clem; et Gregorij a S. Vincentio,

cundæ seriei ; & quarta ad quartam triplicatam, quinta ad quintam quadruplicatam, & sic in infinitum.

Int ab eadem A duæ series continuè pro-



portionalium A B C D E, & A F G H I. Dico C ad G habere duplicatam rationem eius, quam habet B ad F, & D ad H triplicatam, & E ad I quadruplicatam, & sic procedendo.

Quia vt C ad G, ita factum sub A, & C ad factum sub A, & G, ideſt B quadratum ad F quadratum; sed B quadratum ad F quadratum habet duplicatam rationem lateris B ad F; ergo C ad G habet duplicatam rationem B ad F; sed cum factum ex B in C ad factum ex F in G habeat rationem compositam ex ratione B ad F, & ratione C ad G, ideſt duplicata ipsius B ad F, ideſt triplicatam ipsius B ad F; & facto B in C æquetur factum ex A in D; facto vero ex F in G factum ex A in H, habebit factũ ex A in D ad factum ex A in H, ideſt D ad H rationem triplicatam B ad F; similiter argumentabimur de cæteris.

LEMMA III.

Si ab inæqualibus quantitatibus æqualia detrahantur, habebit minor ad maiorem maiorem rationem, quam minus residuum ad maius residuum; & conuertendo maior ad minorem minorem rationem, quam maius residuum ad minus residuum.

Sint inæquales quātitates A B minor, & C D maior, à quibus detrahantur æquales E B, & F D. Dico A B ad C D habere maiorem rationem, quam A E ad C F, & C F ad A E maiorem, quam C D ad A B.

A ——— E ——— B
C ——— G ——— F ——— D

Fiat vt A B ad C D, ita E B ad aliam, quæ erit maior, quam F D, quia C D superat A B; sit hæc D G; erit vt A B ad C D, ita A E ad C G; sed A E ad C G habet maiorem rationem, quam ad C F; ergo A B ad C D habet maiorem rationem, quam A E ad C F; & conuertendo C D ad A B habebit minorem rationem, quam C F ad A E, quod erat probandum.

est elem. terminis transpositis

LEMMA IV.

Si inæqualibus quantitatibus æqualia addantur, habebit minor ad maiorem minorem rationem, quam minor cum adiecta ad maiorem cum adiecta, & conuertendo maior cum adiecta ad minorem cum adiecta habebit

est à elem. terminis ...

bebit minorem rationem, quam maior ad minorem.

Sint inęquales quãtitates A B minor & C D maior, quibus addantur æquales B E, & D F. Dico A B ad C D habere minorem rationem, quam A E ad C F, & C F ad A E minorem, quam C D ad A B.

Fiat vt A B ad C D, ita B E ad D G, quæ erit maior, quam D F; quare vt A B ad C D, ita erit A E ad C G; ſed A E ad C G habet minorem rationem, quam ad C F; ergo A B ad C D, habet minorem rationem, quam A E ad C F, & è contra C D ad A B maiorem, quam C F ad A E, quod erat probandum.

LEMMA V.

Si recta linea ſecetur in duo ſegmenta æqualia, & deinde in duo inæqualia, habebit alterum æqualium ſegmentorum ad alterum inæqualium maiorem rationem, quam alterum inæqualium ad alterum æqualium.

Sit recta A B ſecta in duo æqualia in D, & in duo inæqualia in E. Dico D B alterum ſegmentorum æqualium ad E B, ſeu A E alterum ſegmentorum inæqualium, habere maiorem rationem, quam A E, ſeu E B alterum ſegmentorum inequalium ad A D alterum ſegmentorum æqualium.

Quia

Quia D E ad E B habet maiorem rationem, quam ad D B, & componendo D B ad E B habebit maiorem rationem, quam D E plus D B ad D B, ideſt A E ad A D, & permutando D B ad A E habebit maiorem ratione͂, quam E B ad A D, quod erat probandu͂.

LEMMA VI.

Si recta linea ſecetur primo in duo ſegmenta, quorum alterum alterius ſit duplum, ſecundo in duo alia quæcunq; ſegmenta; habebit minus ſegmentum primæ ſectionis, ad ſegmentum ſecundæ ſectionis ſibi inæquale maiorem rationem, quam ſit ratio duplicata alterius ſegmenti ſecundæ ſectionis, ad maius ſegmentum primæ ſectionis.

O E B E M

F

Sit recta O M ſecta primo in B; ita vt O B ſit dupla ipſius B M; ſecundo vtcunq; in E. Dico B M minus ſegmentum primæ ſectionis ad E M ſegmentum ſecundæ ſectionis ſibi inæquale habere maiorem rationem, qua͂ ſit ratio duplicata O E ad O B.

Sit vt O E ad O B, ita O B ad F; erit ratio O E ad F duplicata ipſius O E ad O B. Dico B M ad E M habere maiorem rationem, quam O E ad F.

Sit prius O E maior, quam O B; erit etiam F maior, quam O B minus B E; nam cum O E, & O B, & F ſint continuè proportionales, erit O E plus F maior dupli-

ci O B,

ci O B; dempto O B communi, erit B E plus F maior O B; ab vtraq; dematur B E; erit F maior O B, minus B E; ergo O E ad O B minus B E habebit maiorem rationem, quam ad F. Tum sic, quia B M ad E M est, vti dupla ipsius B M ad duplam ipsius E M, idest vti O B ad O B minus duplici B E; si vtriq; termino addatur B E, habebit, per quartum Lemma, B M ad E M maiorem rationem, quam O E, ad O B minus B E, sed O E ad O B minus B E habet maiorem rationem, quam ad F.: ergo B M ad E M multo maiorem rationem habebit, quam O E ad F, idest, quam sit duplicata ratio ipsius O E ad O B, quod erat probandum.

Sit secundo O B maior ipsa O E, & facta sit vt O E ad O B, ita O B ad F; erit etiam F maior, quam O B plus B E; quia O E plus F superat duplam ipsius O B, & dupla ipsius O B est æqualis O E, vna cum O B plus B E; si dematur communis O E, erit F maior O B plus B E; ergo O E ad O B plus B E habebit maiorem rationem, quam ad F. Tum sic quia B M ad E M est, vt dupla B M ad duplam E M, idest, vt O B ad O B plus 2 B E; si vtriq; dematur idem B E, remanebit O E, & O B plus B E; quare B M ad E M habebit maiorem rationem, quam O E ad O B plus B E, per Lemma tertium; ergo multo maiorem, quam O E ad F, idest quam sit ratio O E ad O B duplicata.

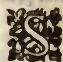
LEMMA VII.

hoc est Lemma antecedens

6. Si recta linea secetur in duo segmenta, quorum alterum alterius sit duplum, secundo in duo alia segmenta quæcunque; habebit

minus

minus ſegmentum primæ ſectionis ad medio loco proportionalem inter minus ſegmentum primæ ſectionis, & alterum ſegmentum ſecundæ ſectionis minori ſegmento primæ ſectionis inæquale maiorem rationem, quam alterum ſegmentum ſecundę ſectionis ad maius ſegmentum primæ ſectionis; vel erit ratio ſubduplicata minoris ſegmenti primæ ſectionis ad ſegmentum ſecundę ſectionis ſibi inæquale maior ratione alterius ſegmenti ſecundæ ſectionis ad maius ſegmentum primæ ſectionis.


It data recta B A, quæ prius diuidatur in M, ita vt M A ſit ipſius B M dupla, deinde vtcunq; in E; & fiat, vt B M ad G, ita G ad B E. Dico B M minus ſegmentum primæ ſectionis ad G medio loco proportionalem inter minus ſegmentum primæ ſectionis, & ſegmentum ſecundæ ſectionis ipſi minori ſegmento primæ ſectionis inæquale habere maiorem rationem, quã A E alterum ſegmentum ſecundæ ſectionis ad A M maius ſegmentum primæ ſectionis.

G

B E M E A

Sit primo B E minor, quam B M. Quia, vt B M ad G, ita G ad B E; erit G minor dimidia ſumma extremarũ, ideſt B M minus dimidia E M; quare B M ad G habebit maiorem rationem, quam ad B M, minus dimidia E M, ideſt, quam dupla ipſius B M ad duplam ipſius B M minus E M, ideſt quam A M ad A M minus E M; ſed A M ad A M minus E M habet maiorem rationem,

D quam

quam A M plus E M, ideſt A E ad A M, per lemma quartum; ergo B M ad G multò maiorem rationem habebit, quam A E ad A M, quod erat probandum.

Sit ſecundo B E maior, quam B M. Quia vt B M ad G, ita G ad B E; erit G minor dimidia ſumma extremarum, ideſt quam B M plus dimidia E M; quare B M ad G habebit maiorem rationem, quam ad B M, plus dimidia E M, ideſt quam dupla ipſius B M ad duplam ipſius B M plus E M, ideſt quam A M ad A M, plus E M; ſed A M ad A M, plus E M habet maiorem rationem, quam A M minus E M, ideſt A E ad A M, per lemma tertium; ergo B M ad G multo maiorem rationem habebit, quam A E ad A M, quod erat probandum.

LEMMA VIII.

Si recta linea ſecetur primo in duo ſegmenta, quorum alterum alterius ſit triplum, ſecundo in duo alia quæcunq; ſegmenta; habebit minus ſegmentum primæ ſectionis ad ſegmentũ ſecundæ ſectionis ſibi inæquale maiorem rationem, quam ſit ratio triplicata alterius ſegmenti ſecundæ ſectionis ad maius ſegmentum primæ ſectionis.

Sit recta A B ſecta primo in M; ita vt A M ſit tripla ipſius M B; ſecundo ſecta vtcunq; in E. Dico B M minus ſegmentũ primę ſectionis ad E B ſegmentum ſecundæ ſectionis ſibi inæquale

A E M E B
F
G

habere

habere maiorem rationem, quam sit ratio triplicata A E ad A M.

Cum E B possit esse, vel maior, vel minor, quã B M. Sit primo minor; & fiant quatuor continuè proportionales A E, & A M, & F, & G; ita vt sit, vt A E ad A M, ita A M ad F, & F ad G; erit ratio A E ad G triplicata ipsius A E ad A M; & erit A E, plus G maior, quam A M plus F; & A E plus F superabit duplam A M; & dempto vtrinq; communi A M, erit E M plus F maior, quam A M; & si vtrinq; dematur E M, erit F maior, quam A M minus E M; sed A E plus G maior est, quam A M plus F, dempto vtrinq; communi A M, erit E M plus G maior, quam F; Ergo E M plus G multò magis superabit A M minus E M; & si vtrinq; dematur E M, erit G maior, quam A M minus dupla E M. Quare A E ad A M minus dupla E M habebit maiorem rationem, quam ad G, idest quam sit triplicata ratio ipsius A E ad A M. Tum sic, quia B M ad B E est vti tripla B M ad triplam B E; sed triplæ B M est æqualis A M; ergo B M ad B E erit, vt A M ad triplam B E; si vtriq; termino A M, & triplæ B E addatur eadem M E, habebit, per lemma quartum, A M ad triplam B E maiorem rationem, quam A E ad triplam B E, plus E M, idest ad A M minus dupla E M. Quare B M ad B E habebit maiorem rationem, quam A E ad A M minus dupla E M; sed demonstratum est A E ad A M minus dupla E M habere maiorem rationem, quam sit ratio triplicata ipsius A E ad A M; ergo B M ad B E habebit multò maiorem rationem, quam sit ratio triplicata A E ad A M, quod erat probandum.

Sit ſecundo E B maior, quam B M. Dico B M ad E B habere maiorem rationem, quam ſit ratio triplicata A E ad A M; Nam factis iterum quatuor continuè proportionalibus, quarum prima ſit A E, & ſecunda A M, erit quarta illa, ad quam A E habebit rationem triplicatam eius, quam habet ad A M; & quia A M eſt æqualis triplæ B M, & A E eſt æqualis triplæ B M minus E M, & B E eſt æqualis B M, plus M E. Dico B M ad B M plus M E habere maiorem ratione͂, quam ſit ratio triplicata, quam habet tripla B M, minus E M ad triplam B M. Fiat enim vt B M ad B M plus M E, ita tripla B M minus E M ad aliam, exurget 3 B M plus 2 M E minus $\frac{\text{M E quadrato}}{\text{B M}}$, quæ minor erit quarta proportionali in ſerie continuè proportionalium, quarum prima ſit 3 B M, minus M E, & ſecunda 3 B M; nam tertia erit $\frac{\text{9 B M quadrata}}{\text{3 B M minus M E}}$, & quarta erit $\frac{\text{27 B M Cubi}}{\text{9 B M quadratis minus 6 B M in M E plus M E quadrato}}$, quæ ſuperabit 3 B M, plus 2 M E, minus $\frac{\text{M E quadrato}}{\text{B M}}$, & id circò ad hanc 3 B M, minus E M habebit maiorem rationem, quam ad quartam proportionalem inuentam; ſed 3 B M minus E M ad 3 B M, plus 2 M E minus $\frac{\text{M E quadrato}}{\text{B M}}$ habet per conſtructionem eam rationem, quam habet B M ad B M, plus M E, ideſt B E; ergo B M ad B E habet maiorem rationem, quam ſit ratio A E ad A M triplicata. Quartam vero proportionalem inuentam, ideſt $\frac{\text{27 B M Cubos}}{\text{9 B M quadratis minus 6 B M in M E plus M E quadrato}}$ ſuperare 3 B M, plus 2 M E minus $\frac{\text{M E quadrato}}{\text{B M}}$ ex ſequentibus patebit; nam ſi vtraq; pars ducatur in 9 B M quadrata minus 6 B M in M E plus M E quadrato, prima pars erit æqualis 27 B M cubis, & ſecunda pars erit æqualis 27 B M

cubis,

cubis, minus 18 B M in M E quadratum plus 8 M E cubis minus $\frac{\text{M E quadrato quadrato}}{\text{B M}}$; & si fiat Antithesis, & demantur communia, prima pars erit æqualis 18 B M in M E quadratum plus $\frac{\text{M E quadrato quadrato}}{\text{B M}}$, & secunda pars erit æqualis 8 M E cubis; & si vtraq; pars ducatur in B M, & applicetur M E quadrato, erit prima pars æqualis 18 B M quadratis plus M E quadrato; & secunda pars æqualis 8 B M in M E; primam autem partem superare secundam patet; nam si M E singatur, vt sit omnium maxima, etiam secunda pars erit omnium maxima; sed cum, vt sit maxima, licet possit superare duplam B M, tamen debeat deficere à tripla B M; constituatur æqualis duplici B M, plus A; ita tamen vt B M superet A, erit prima pars, facta interpretatione, æqualis 22 B M quadratis plus 4 B M in A plus A quadrato, & secunda pars erit æqualis 16 B M quadratis plus 8 B M in A, & demptis communibus, erit prima pars æqualis 6 B M quadratis plus A quadrato, & secunda pars erit æqualis 4 B M in A; cum autem B M superet A, & prima pars superabit secundam. Quare euidens erit conclusio B M ad B E habere maiorem rationem, quam sit ratio triplicata A E ad A M, quod erat demonstrandum.

LEMMA IX.

Si fuerint quatuor magnitudines continuè proportionales aggregatum duplæ maximæ cum minima superabit triplam mediam maiorem, & aggregatum duplæ minimæ

cum

cum maxima superabit triplam mediam minorem.


It vt A ad B, ita B ad C, & C ad D, & sit A maxima, & D minima. Dico primo aggregatum duplæ A cum D superare triplam B; Quia A plus D superat B plus C, & A plus C superat duplam B, erit aggregatum ex duplici A, plus D plus C maius aggregato ex tripla B plus C, & si dematur communis C erit dupla A plus D maior triplici B, quod erat probandum.

Dico secundo aggregatum duplæ D cum A superare triplam C. Quia D plus A superat B plus C, & D plus B superat duplam C, erit aggregatum ex duplici D plus A plus B maius aggregato ex triplici C plus B, & dempto communi B, erit aggregatum ex duplici D plus A maius triplici C, quod erat demonstrandum.

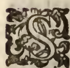
LEMMA X.

est Lemma 8. antecedens

Si recta linea secetur in duo segmenta, quorum alterum alterius sit triplum, secundo in duo alia segmenta quæcunq; habebit minus segmentum primæ sectionis ad primam duarum medio loco proportionalium inter minus segmentum primæ sectionis, & alterum segmentum secundę sectionis minori segmento primæ sectionis inæquale maiorem rationem, quam alterum segmentum

secundæ

ſecundæ ſectionis ad maius ſegmentum primæ ſectionis ; vel erit ratio ſubtriplicata minoris ſegmenti primæ ſectionis ad ſegmentum ſecundæ ſectionis ſibi inæquale maior ratione alterius ſegmenti ſecundæ ſectionis ad maius ſegmentum primæ ſectionis ; Vel maius ſegmentum primæ ſectionis ad ſegmentum ſecundæ ſectionis ſibi inæquale habebit maiorem rationem, quam ſit ratio primæ duarum medio loco proportionalium inter minus ſegmentum primæ ſectionis, & alterum ſegmentum ſecundæ ſectionis ad minus ſegmentum primæ ſectionis ; ideſt quam ſit ratio ſubtriplicata alterius ſegmenti ſecundæ ſectionis ad minus ſegmentum primæ ſectionis ; eadem enim eſt ſemper propoſitio.



It data recta B A, quæ primo diuidatur in M, ita vt M A ſit ipſius B M tripla, deinde vtcunq; in E, & inter B M, & B E ſupponantur duæ mediæ proportionales G, & F; ita vt ſit, vt B M ad G, ita G ad F, & F ad B E. Dico B M minus ſegmentum primæ ſectionis ad G primam medio loco ptoportionalium inter B M minus ſegmentum primæ ſectionis, & B E ſegmentum ſecundæ ſectionis ipſi B M inæquale habere

A E M E B

F

G

bere maiorem rationem, quam A E alterum ſegmentum ſecundæ ſectionis ad A M maius ſegmentum primæ ſectionis; & è contra A M maius ſegmentum primæ ſectionis ad A E ſegmentum ſecundæ ſectionis ſibi inæquale habere maiorem rationem, quam G ad B M, ideſt, quam B E ad F, ideſt, quam ſit ratio ſubtriplicata B E alterius ſegmenti ſecundæ ſectionis ad B M minus ſegmentum primæ ſectionis.

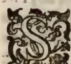
Sit primo B E minor, quam B M, erit, per ſuperius lemma, dupla B M plus B E maior, quam tripla G, & quia B M eſt æqualis B E plus E M, erit tripla B M minus E M maior, quam tripla G; & ſi vtriuſq; partis ſumatur pars tertia, erit B M minus tertia parte E M maior G. Quare B M ad G habebit maiorem rationem, quam ad B M minus tertia parte E M, ſeu quam tripla B M, ideſt A M ad A M minus E M; ſi autem vtriq; parti addatur E M, habebit per lemma quartum, A M plus E M, ideſt A E ad A M minorem rationem, quam A M ad A M minus E M; ergo B M ad G multo maiorem rationem habebit, quam A E ad A M, quod erat primo loco probandum.

Sit ſecundo B E maior, quam B M. Quia per lemma ſuperius, dupla B M plus B E ſuperat triplam G, & B E eſt æqualis B M plus E M, erit tripla B M, ideſt A M plus E M maior tripla G; quare tripla B M ad triplam G habebit maiorem rationem, quam ad A M plus E M; ſed vt tripla B M ad triplam G, ita B M ad G; ergo B M ad G habebit maiorem rationem, quam tripla B M, ideſt A M ad A M plus E M; & quia A M ad A M, plus E M habet maiorem rationem,

tionem, quam A M minus E M, ideſt A E ad A M, per lemma tertium; habebit B M ad G multo maiorem rationem, quam A E ad A M; quod erat probandum.

LEMMA XI.

Si recta linea ſecetur primo in duo ſegmenta, quorum alterum alterius ſit quadruplum, ſecundo in duo alia quæcunq; ſegmenta, habebit minus ſegmentum primæ ſectionis ad ſegmentum ſecundæ ſectionis ſibi inæquale maiorem rationem, quam ſit ratio quadruplicata alterius ſegmenti ad maius ſegmentum primæ ſectionis.



It recta A B A________E__M_E__B
ſecta primo F______________
in M; ita, vt G__________
A M ſit quadrupla ip- R______
ſius M B, ſecundo ſecta vtcunq; in E. Dico B M minus ſegmentum primæ ſectionis ad E B ſegmentum ſecundæ ſectionis ſibi inæquale habere maiorem rationem, quam ſit ratio quadruplicata A E ad A M.

Cum E B poſſit eſſe, vel maior, vel minor, quam B M; ſit primo minor, & fiant quinq; continuè proportionales A E, & A M, & F, & G, & R; ita, vt ſit, vt A E ad A M, ita A M ad F, & F ad G, & G ad R; erit ratio A E ad R quadruplicata rationis A E ad A M. Dico B M ad B E habere maiorem rationem, quam A E ad R.

Quia A E, plus F ſuperat duplam A M, & A E per

constructionem est æqualis A M plus M E; erit aggregatum ex A M cum M E cum F maius dupla A M; vtrinque dematur A M plus M E, erit F maior A M minus M E. Quia vero A E plus G superat A M plus F, si dematur vtrinque A M, erit M E plus G maior, quam F; ergo multo maior, quam A M minus M E; ergo si dematur vtrinq; M E, G superabit A M minus duplici M E.

Rursus, quia A M plus R superat F plus G, & F superat A M minus M E, & G superat A M minus duplici M E, multo magis A M plus R superabit duplam A M minus tripla M E; si vtrinq; dematur A M, & R superabit A M minus tripla M E; ergo A E ad A M minus tripla M E habebit maiorem rationem, quam ad R; sed, vt B M ad B E, ita quatuor B M, idest A M ad quatuor B E, idest ad A M minus quatuor M E, & A M ad A M minus quatuor M E habet maiorem rationem, quam A M plus M E, idest A E ad A M, minus tripla M E, per lemma quartum, & A E ad A M minus tripla M E habet maiorem rationem, quam ad R; ergo B M ad B E habebit multo maiorem rationem, quam A E ad R, quod erat demonstrandum.

ALITER.

Quia R superat A M minus tripla M E, & multo magis etiam superabit si dematur ea, ad quam M E habeat eam rationem, quam habet B M ad M E; sed hæc est illa, ad quam quadrupla B M plus M E, idest A E habet eam rationem, quam B M habet ad B M minus M E, idest ad B E; quare si fiat, vt B M ad B E, ita A E ad aliam, hæc erit minor quam R; ergo A E ad hanc habebit maiorem rationem, quam ad R; ergo B M ad B E habebit maiorem

rem rationem,quam A E ad R,quod erat demonstrandū.

Sit secundo B E maior, quam B M, & sit iterum; vt A E ad A M, ita A M ad F, & F ad G, & G ad R. Dico secundo B M ad B E habere maiorem rationem, quam A E ad R.

Quia A E plus F superat duplam A M, & A E est æqualis A M minus M E; si vtrinq; dematur A E, erit F maior,quam A M plus M E. Quia verò A E plus G superat A M plus F, sit dematur vtrinq; A E, erit G maior F plus M E, & G minus M E superabit F; ergo multò magis A M plus M E; Vtriq; parti addatur M E; ergo G superabit A M plus dupla M E. Rursus, quia A M plus R superat F plus G, ergo multo magis superabit duplā A M plus tripla M E; & si vtrinq; dematur A M, erit R maior A M plus tripla M E; ergo A E ad A M plus tripla M E habebit maiorem rationem, quam ad R; sed vt B M ad B E, ita quatuor B M, ideſt A M ad quatuor B E, ideſt A M plus quatuor M E; si dematur M E, habebit, per lemma tertium, A M ad A M plus quatuor B E, ideſt B M ad B E maiorem rationem, quam A M minus M E ad A M plus tripla M E, ideſt A E ad A M plus tripla M E; sed A E ad A M plus tripla M E demonstrata est habere maiorem rationem, quam ad R; ergo B M ad B E habebit multo maiorem rationem, quam A E ad R, quod erat probandum.

A L I T E R.

Quia R superat A M plus tripla M E, multo magis superabit, si ab A M plus tripla M E dematur ea, ad quam M E habeat eam rationem, quam habet B M ad M E: sed hæc est illa, ad quam quadrupla B M minus

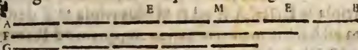
M E, ideſt A E habet eam rationem, quam habet B M ad B M plus M E, ideſt ad B E; ergo ſi fiat vt B M ad B E, ita A E ad aliam, hæc erit minor quam R; ergo A E ad hanc habebit maiorem rationem, quam ad R; ergo B M ad B E habet maiorem rationem, quam A E ad R, ideſt quam ſit ratio A E ad A M quadruplicata, quod ſumpſimus demonſtrandum.

LEMMA XII.

Si recta linea ſecetur primo in duo ſegmenta, quorum alterum alterius ſit ſeſquialterum; tum in alia duo vtcunq; habebit minus ſegmentum primæ ſectionis ad ſegmentum ſecundæ ſectionis ſibi inæquale maiorem rationem, quam ſit ratio ſeſquiplicata rationis alterius ſegmenti ſecundæ ſectionis ad maius ſegmentum primæ ſectionis.



It data recta A B, quæ prius ſecetur in M; ita vt ſegmentũ A M ſit ſeſquialterum ſegmenti M B;



deinde vtcunq; in E, & fiat, vt A E ad F, ita F ad A M, & A M ad G; erit ratio A E ad G ſeſquiplicata rationis A E ad A M. Dico B M ad B E habere maiorem rationem, quam A E ad G. Vel B E erit maior quam B M, vel minor. Sit primo B E minor, quam B M, & ſit æqualis B M, minus E M; erit A E æqualis A M, plus E M,

& A M est sesquialtera B M per constructionem.

Quia verò A E, & F, & A M, & G sunt continuè proportionales; erit, per lemma nonum, aggregatum duplæ G, cum A E maius tripla A M; & si dematur vtrinq; A E, erit dupla G maior dupla A M, minus M E; & si vtraq; pars diuidatur per duo, erit G maior A M minus dimidia M E; Quare A E ad A M minus dimidia M E habebit maiorem rationem, quam ad G; sed quia, vt B M ad B M minus E M; ita sesquialtera B M ad sesquialteram B M minus sesquialtera E M, idest A M ad A M minus sesquialtera E M; si vtriq; termino addatur E M, habebit, per Lemma quartum, A M ad A M minus sesquialtera E M maiorem rationem, quam A E ad A M minus dimidia E M; ergo multo maiorem, qnam A E ad G; sed vt A M ad A M minus sesquialtera E M, ita est B M ad B M minus E M, idest B M ad B E; ergo B M ad B E habet maiorem rationem, quam A E ad G, idest quam sit ratio sesquiplicata A E ad A M, quod erat primo loco demonstrandum.

Sit secundo B E maior, quam B M, idest æquetur B M, plus E M; erit A E æqualis A M minus E M, & A M est sesquialtera B M, per constructionem.

Quia vero A E, & F, & A M, & G sunt continuè proportionales; erit, per Lemma nonum, aggregatum duplæ G, cum A E maius tripla A M; & si dematur vtrinque A E, erit dupla G maior dupla A M plus M E; & si vtraq; pars diuidatur per duo, erit G maior A M, plus dimidia M E. Quare A E ad A M, plus dimidia M E habebit maiorem rationẽ, quam ad G; sed quia, vt B M ad B E, idest B M plus E M, ita sesquialtera B M ad ses-

quial-

quialteram B M plus sesquialtera E M, idest A M ad A M plus sesquialtera E M; si ab vtroq; termino subtrahatur eadem E M, habebit A M ad A M plus sesquialtera E M maiorem rationem, quam A E ad A M, plus dimidia E M; sed A E ad A M plus dimidia E M habet maiorem rationem, quam A E ad G; ergo A M ad A M plus sesquialtera E M habebit multo maiorem rationem, quam A E ad G; sed vt A M ad A M plus sesquialtera E M, ita B M ad B M, plus E M, idest B M ad B E; ergo B M ad B E habebit maiorem rationem, quam A E ad G, idest, quam sit ratio sesquiplicata A E ad A M, quod erat demonstrandum.

LEMMA XIII.

est Lemma 12 antecedens.

Si recta linea secetur primo in duo segmenta, quorum alterum alterius sit sesquialterum; tum in alia duo vtcunq; habebit maius segmentum primæ sectionis ad segmentum secundæ sectionis sibi inæquale maiorem rationem, quam sit ratio subsesquiplicata rationis alterius segmenti secundæ sectionis ad minus segmentum primæ sectionis.

Sit data recta A B, quę prius secetur in M, ita vt B M sit sesquialtera ipsius A M, deinde vtcunq; in E. Dico B M maius segmentum primæ sectionis ad B E segmentum secundæ sectionis sibi inæquale habere maiorem rationem, quam sit ratio subsesquipli-

quiplicata A E alterius ſegmenti ſecundæ ſectionis ad A M minus ſegmentum primæ ſectionis.

Inter A E, & A M intelligantur duæ mediæ proportionales F, & G; ita vt ſit, vt A E ad F, ita F ad G, & G ad A M (cum autem indeterminata ſit A E, & non exigatur ipſa duarum mediarum inter duas datas inuentio, ſed ſolum, vt admittantur inuentæ, hæc hypoteſis non officiet geometricæ demonſtrationi;) Quare ratio A E ad G erit ſubſeſquiplicata ipſius A E ad A M. Dico B M ad B E habere maiorem rationem, quam A E ad G. Vel B E erit minor, quam B M, vel maior.

Sit primo B E minor, quam B M, & ſit æqualis B M minus E M, erit A E æqualis A M plus E M; & quia A M eſt ſubſeſquialtera B M, erit B M æqualis $\frac{3AM}{2}$, & B E æqualis $\frac{3AM}{2}$ minus E M. Dico $\frac{3AM}{2}$ ad $\frac{3AM}{2}$ minus E M habere maiorem rationem, quam A M plus E M ad G.

Si enim non habeat maiorem rationem, vel habebit æqualem, vel minorem. Habeat primo æqualem; ſi continuetur ratio A M ad G, vt ſint quatuor continuè proportionales, erit quarta continuè proportionalium eadem A M plus E M; ſi verò habeat minorem rationem; ſi fiat, vt $\frac{3AM}{2}$ ad $\frac{3AM}{2}$ minus E M, ita A M plus E M ad aliam, hæc erit maior G; nam A M plus E M ad hanc habebit minorem rationem, quam ad G; cum igitur ſit maior, quam G, ſi continuetur ratio A M ad hanc inuentam, vt ſint quatuor continuè proportionales, erit quarta continuè proportionalium maior, quam ſit A M, plus E M; nam ſi deficeret ab A M plus E M, euidens eſſet etiam inuentam illam deficere a G; quare manifeſta eſſet propoſitio $\frac{3AM}{2}$ ad $\frac{3AM}{2}$ minus E M habe-

re

re maiorem rationem ; quam A M plus E M ad G. Experiamur igitur, & fiat vt $\frac{3\ A\ M}{2}$ ad $\frac{3\ A\ M}{2}$ minus E M, ita A M, plus E M ad aliam, exurget A M plus $\frac{E\ M}{3}$ minus $\frac{2\ E\ M\ \text{quadratis}}{3\ A\ M}$. Reperiantur nunc quatuor continuè proportionales, quarum prima sit A M, & secunda A M plus $\frac{E\ M}{3}$ minus $\frac{2\ E\ M\ \text{quadratis}}{3\ A\ M}$; erit tertia A M plus $\frac{2\ E\ M}{3}$ minus $\frac{11\ E\ M\ \text{quadratis}}{9\ A\ M}$ minus $\frac{4\ E\ M\ \text{Cubis}}{9\ A\ M\ \text{quadratis}}$ plus $\frac{4\ E\ M\ \text{quadrato quadratis}}{9\ A\ M\ \text{Cubis}}$; & quarta erit A M plus E M minus $\frac{5\ E\ M\ \text{quadratis}}{3\ A\ M}$ minus $\frac{35\ E\ M\ \text{Cubis}}{27\ A\ M\ \text{quadratis}}$ plus $\frac{10\ E\ M\ \text{quadrato quadratis}}{9\ A\ M\ \text{Cubis}}$ plus $\frac{4\ E\ M\ \text{quadrato Cubis}}{9\ A\ M\ \text{quadrato quadratis}}$ minus $\frac{8\ E\ M\ \text{Cubo Cubis}}{27\ A\ M\ \text{quadrato Cubis}}$. Hæc vltimo loco inuenta comparanda est cum A M plus E M, vt cognoſcamus, ſit ne ipſi æqualis, an cedat, an ſuperet; comparetur, & fiat Antithesis; cum vtraq; parti idem addatur, aut ſubtrahatur, ſi extiterint æquales, omnia ſemper erunt æqualia; ſi verò nō extiterint æquales, pars, quæ primo ſuperabat, aut cedebat, ſemper etiam ſuperabit, aut cedet; idem etiam accidet, ſi vtraq; pars in eandem quantitatem ducatur, aut eidem quantitati applicetur. Fiat igitur Antithesis, & demantur cōmunia, erit prima pars $\frac{10\ E\ M\ \text{quadrato quadrata}}{9\ A\ M\ \text{Cubis}}$ plus $\frac{4\ E\ M\ \text{quadrato Cubis}}{9\ A\ M\ \text{quadrato quadratis}}$, & altera pars erit $\frac{5\ E\ M\ \text{quadrata}}{3\ A\ M}$ plus $\frac{35\ E\ M\ \text{Cubis}}{27\ A\ M\ \text{quadratis}}$ plus $\frac{8\ E\ M\ \text{Cubo Cubis}}{27\ A\ M\ \text{quadrato Cubis}}$; & ſi vtraq; pars ducatur in 27 A M quadrato cubos; erit prima pars 30 A M quadrata in E M quadrato quadratum plus 12 A M in E M quadrato cubum; & ſecunda pars erit 45 A M quadrato quadrata in E M quadratum, plus 35 A M cubis in E M cubum, plus 8 E M cubo cubis; & ſi vtraq; pars applicetur ad E M quadratum, erit prima pars 30 A M quadrata in E M quadratum plus 12 A M in E M cubum; & ſecunda pars erit 45 A M quadrato quadrata plus 35 A M cubis in E M plus 8 E M quadrato quadratis; vt autem dignoſcatur alte-

 rutrius

rutrius partis, quænam ſit maior, aut minor, conſideretur E M, quæ erit, vel minor, vel æqualis, vel maior A M; ita tamen, vt ſi ſit maior deficiat à $\frac{3 A M}{2}$. Si ſit æqualis, aut minor, patet 30 A M quadrata in E M quadratum plus 12 A M in E M cubum deficere à 45 A M quadrato quadratis plus 35 A M cubis in E M plus 8 E M quadrato quadratis; Quare iuxta ea, quæ ſuperius docuimus, cum inuenta quarta proportionalis deficiat ab A M plus E M, habebit $\frac{3 A M}{2}$ ad $\frac{3 A M}{2}$ minus E M maiorem rationem, quam A M plus E M ad G, quod ſumpſimus demonſtrandum. Sit verò E M maior A M, ſed minor quam $\frac{3 A M}{2}$; idcirco ſupponatur E M æqualis A M plus F, erit F minor $\frac{A M}{2}$; his poſitis interpretetur vtraq; pars; erit prima pars, ideſt 30 A M quadrata in E M quadratum plus 12 A M in E M cubum æqualis 42 A M quadrato quadratis plus 96 A M cubis in F plus 66 A M quadratis in F quadratum plus 12 A M in F cubum; & ſecunda ideſt 45 A M quadrato quadrata plus 35 A M cubis in E M plus 8 E M quadrato quadratis erit æqualis 88 A M quadrato quadratis plus 67 A M cubis in F plus 48 A M quadratis in F quadratum plus 32 A M in F cubum plus 8 F quadrato quadratis; & ſi ab vtraq; parte tollantur communia, erit reſiduum primæ partis 29 A M cubi in F plus 18 A M quadratis in F quadratum, & reſiduum ſecundæ partis erit 46 A M quadrato quadrata plus 20 A M in F cubum plus 8 F quadrato quadratis; cum autem pateat primam partem deficere à ſecunda, quia $\frac{A M}{2}$ ſuperat F euidens erit concluſio $\frac{3 A M}{2}$ ad $\frac{3 A M}{2}$ minus E M habere maiorem rationem, quam A M plus E M ad G, quod propoſuimus.

Sit ſecundo B E maior, quam B M, & ſit æqualis B M plus E M, erit A E æqualis A M minus E M; & quia A M eſt ſubſeſquialtera B M, erit B M æqualis $\frac{3\ A\ M}{2}$; & B E æqualis $\frac{3\ A\ M}{2}$ plus E M; & iterum intelligatur eſſe, vt A M minus E M ad F, ita F ad G, & G ad A M; erit ratio A M, minus E M ad G ſubſeſquiplicata rationis A M minus E M ad A M. Dico igitur $\frac{3\ A\ M}{2}$ ad $\frac{3\ A\ M}{2}$ plus E M habere maiorem rationem, quam A M minus E M ad G. Si enim non habeat maiorem rationem, vel habebit æqualem, vel minorem; ſi habeat æqualem, ſi continuetur ratio A M ad G, vt ſint quatuor continuè proportionales, erit quarta continuè proportionalium eadem A M minus E M; ſi verò habeat minorem rationem: ſi fiat, vt $\frac{3\ A\ M}{2}$ ad $\frac{3\ A\ M}{2}$ plus E M, ita A M minus E M ad aliam, hæc erit maior G; nam A M minus E M ad hanc habebit minorem rationem, quam ad G; cum igitur ſit maior, quam G, ſi continuetur ratio A M ad hanc inuentam, vt ſint quatuor continuè proportionales, erit quarta continuè proportionalium maior, quam ſit A M minus E M; nam ſi probetur deficere ab A M minus E M, euidens etiam erit inuentam illam deficere à G; Quare manifeſta erit propoſitio $\frac{3\ A\ M}{2}$ ad $\frac{3\ A\ M}{2}$ plus E M habere maiorem rationem, quam A M minus E M ad G. Experiamur igitur, & fiat, vt $\frac{3\ A\ M}{2}$ ad $\frac{3\ A\ M}{2}$ plus E M, ita A M minus E M ad aliam, hæc erit A M minus $\frac{E\ M}{3}$ minus $\frac{2\ E\ M\ \text{quadratis}}{3\ A\ M}$. Reperiātur nunc quatuor continuè proportionales, quarum prima ſit A M, & ſecunda ſit A M minus $\frac{E\ M}{3}$ minus $\frac{2\ E\ M\ \text{quadrato}}{3\ A\ M}$; erit tertia A M minus $\frac{2\ E\ M}{3}$ minus $\frac{11\ E\ M\ \text{quadratis}}{9\ A\ M}$ plus $\frac{4\ E\ M\ \text{Cubis}}{9\ A\ M\ \text{quadratis}}$ plus $\frac{4\ E\ M\ \text{quadrato quadratis}}{9\ A\ M\ \text{Cubis}}$; & quarta erit A M minus E M minus

5 E M

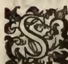
$\frac{\text{5 E M quadratis}}{\text{3 A M}}$ plus $\frac{\text{35 E M Cubis}}{\text{27 A M quadratis}}$ plus $\frac{\text{30 E M quadrato quadratis}}{\text{27 A M Cubis}}$ minus $\frac{\text{12 E M quadrato Cubis}}{\text{27 A M quadrato quadratis}}$ minus $\frac{\text{8 E M Cubo Cubis}}{\text{27 A M quadrato Cubis}}$, quæ, quia cedit ipſi A M minus E M, & etiam A M minus $\frac{\text{E M}}{3}$ minus $\frac{\text{2 E M quadratis}}{\text{3 A M}}$, hoc eſt illa ad, quam A M minus E M habet eam rationem, quam habet $\frac{\text{3 A M}}{2}$ ad $\frac{\text{3 A M}}{2}$ plus E M, cedet ipſi G; quare $\frac{\text{3 A M}}{2}$, ideſt B M ad $\frac{\text{3 A M}}{2}$ plus E M, ideſt B E habebit maiorem rationem, quam A M minus E M, ideſt A E ad G. Nunc reliquum eſt, vt probetur A M minus E M minus $\frac{\text{5 E M quadratis}}{\text{3 A M}}$ plus $\frac{\text{35 E M Cubis}}{\text{27 A M quadratis}}$ plus $\frac{\text{30 E M quadrato quadratis}}{\text{27 A M Cubis}}$ minus $\frac{\text{12 E M quadrato Cubis}}{\text{27 A M quadrato quadratis}}$ minus $\frac{\text{8 E M Cubo Cubis}}{\text{27 A M quadrato Cubis}}$ cedere ipſi A M minus E M; fiat ideò Antitheſis, & demantur cõmunia, erit reſiduum primæ partis $\frac{\text{35 E M Cubi}}{\text{27 A M quadratis}}$ plus $\frac{\text{30 E M quadrato quadratis}}{\text{27 A M Cubis}}$; & ſecundæ partis erit $\frac{\text{5 E M quadrata}}{\text{3 A M}}$ plus $\frac{\text{12 E M quadrato Cubis}}{\text{27 A M quadrato quadratis}}$ plus $\frac{\text{8 E M Cubo Cubis}}{\text{27 A M quadrato Cubis}}$. Vtraq; pars ducatur in 27 A M quadrato cubos, & applicetur E M quadrato; erit prima pars 35 E M in A M cubum plus 30 E M quadratis in A M quadratum; & ſecunda pars erit 45 A M quadrato quadrata plus 12 E M cubis in A M plus 8 E M quadrato quadratis; quia verò E M cedit ipſi A M, & prima pars cedet ſecundæ; quod vt euidentius innoteſcat; quia A M ſuperat E M, ſit E M æqualis A M minus F; ſi fiat interpretatio, erit prima pars æqualis 65 A M quadrato quadratis minus 95. A M cubis in F plus triginta A M quadratis in F quadratum; & ſecunda pars erit 65 A M quadrato quadrata minus 68 A M cubis in F plus 84 A M quadratis in F quadratum minus 44 A M in F cubum plus 8 F quadrato quadratis; ſi fiat Antitheſis, & demantur communia, erit prima pars æqualis 44 A M in F cubum, & ſecunda pars erit æqualis 27 A M cubis in F plus 54 A M quadratis in F quadratum plus

8 F quadrato quadratis. Quia autem F cedit ipſi A M, erit factum ex A M in F cubum minus facto ex A M in F quadratum; quare 44 A M in F cubum cedent 44 A M quadratis in F quadratū. Et idcircò multo magis prima pars cedet ſecūdæ parti. Quare euidens erit propoſitio.

LEMMA XIV.

est Lemma 11 antecedens

Si recta linea ſecetur primo in duo ſegmenta, quorum alterum alterius ſit quadruplum, ſecundo in duo alia quæcunq; ſegmenta, habebit maius ſegmentum primæ ſectionis ad ſegmentum ſecundæ ſectionis ſibi inæquale maiorem rationem, quam ſit ratio ſubquadruplicata alterius ſegmenti ad minus ſegmentum primæ ſectionis.



It data recta A B, quæ prius ſecetur in M; ita vt B M ſit quadrupla ipſius A M; ſecundo ſecetur vtcunq; in E. Dico B M maius ſegmentum primæ ſectionis ad B E ſegmentum ſecundæ ſectionis ſibi inæquale habere maiorem rationem, quam ſit ratio ſubquadruplicata alterius ſegmenti A E ad minus ſegmentum primæ ſectionis A M. Inter A E, & A M ſint tres continuè proportionales F, & G, & H; ita, vt ſint quinque continuè proportionales, quarum prima ſit A E, ſecunda F, tertia G, quarta H, quinta A M, habebit A E ad F rationem ſubquadruplicatam eius, quam habet ad

ad A M. Quare dico B M ad B E habere maiorem rationem, quam A E ad F. Vel B E erit maior, quam B M, vel minor.

Sit primò B E minor, quam B M; & quia B M est æqualis quadruplæ A M, sit B E æqualis quadruplæ A M minus M E, & A E sit æqualis A M, plus M E. Dico 4 A M ad 4 A M minus M E habere maiorem rationem, quam sit ratio A M plus M E, siue A E ad F, seù quam sit ratio subquadruplicata A M plus M E ad A M; si enim non habeat maiorem, vel habebit eandem, vel minorem; si habeat eandem; si fiat, vt 4 A M ad 4 A M minus M E, ita A M plus M E ad aliam, hæc erit æqualis F; & si hæc ratio continuetur, vt sint quinq; continuè proportionales, erit quinta ipsa A M; si verò habeat minorem rationem, si fiat, vt 4 A M ad 4 A M minus M E, ita A M plus M E ad aliam, hæc erit maior, quam F; & ideò, si hæc ratio continuetur, vt sint quinq; continuè proportionales, erit quinta maior A M; si verò habeat maiorem, tunc si fiat, vt 4 A M ad 4 A M minus M E, ita A M plus M E ad aliam, hæc erit minor, quam F; idcirco, si hæc ratio continuetur, vt sint quinque continuè proportionales, erit quinta minor A M. Reperiantur igitur in ratione 4 A M ad 4 A M minus M E quinq; continuè proportionales, quarum prima sit A M plus M E; si quinta probabitur minor, quam sit A M, probata erit propositio. Cum in ratione, quam habent 4 A M ad 4 A M, minus M E quinq; continuè proportionalium, prima sit A M plus M E, erit secunda A M plus $\frac{3\ M\ E}{4}$ minus $\frac{M\ E\ quadrato}{4\ A\ M}$; & tertia erit A M plus $\frac{M\ E}{2}$ minus $\frac{7\ M\ E\ quadratis}{16\ A\ M}$ plus $\frac{M\ E\ Cubo}{16\ A\ M\ quadratis}$; & quarta erit A M, plus $\frac{M\ E}{4}$

$\frac{\text{M E}}{4}$ minus $\frac{\text{9 M E quadratis}}{\text{16 A M}}$ plus $\frac{\text{11 M E Cubis}}{\text{64 A M quadratis}}$ minus $\frac{\text{M E quadrato quadrato}}{\text{64 A M Cubis}}$; & quinta erit A M minus $\frac{\text{5 M E quadratis}}{\text{8 A M}}$ plus $\frac{\text{5 M E Cubis}}{\text{16 A M quadratis}}$ minus $\frac{\text{15 M E quadrato quadratis}}{\text{256 A M Cubis}}$ plus $\frac{\text{M E quadrato Cubo}}{\text{256 A M quadrato quadratis}}$, quæ ſi comparetur cum A M, erit minor ipſa A M; comparetur enim, & fiat Antitheſis, & dematur communis A M, erit prima pars $\frac{\text{5 M E Cubi}}{\text{15 A M quadratis}}$ plus $\frac{\text{M E quadrato Cubo}}{\text{256 A M quadrato quadratis}}$; & ſecunda pars erit $\frac{\text{5 M E quadrata}}{\text{8 A M}}$ plus $\frac{\text{15 M E quadrato quadratis}}{\text{256 A M Cubis}}$; vtraq; pars ducatur in 256 A M quadrato quadrata, & applicetur M E quadrato, erit prima pars 80 M E in A M quadratum plus M E cubo; & ſecunda pars erit 160 A M cubi plus 15 A M in M E quadratum; vt autem prima pars ſit omnium maxima ponatur M E omnium maxima; nam ſi ponatur minor, prima pars ſemper magis decreſcet à ſecunda parte, vt patet; quia autem, cum, vt ſit maxima, poſſit excedere triplam A M, ſed deficere debeat à quadrupla, ponatur M E æqualis triplæ A M plus F; ita tamen, vt A M ſuperet F; erit, facta interpretatione prima pars æqualis 267 A M cubis plus 107 A M quadratis in F plus 9 A M in F quadratum plus F cubo; & ſecunda pars erit æqualis 295 A M cubis plus 90 A M quadratis in F plus 15 A M in F quadratum; & ſi vtrinq; demantur communia, erit prima pars 17 A M quadrata in F plus F cubo, & ſecunda erit 28 A M cubi plus 6 A M in F quadratum. Quia vero A M ſuperat F patet etiam primam partem deficere à ſecunda. Quare patet propoſitio; hoc eſt B M ad B E habere maiorem rationem, quam ſit ratio A E ad A M ſubquadruplicata poſita B M maiori, quam B E.

Sit ſecundo B E maior, quam B M; ideò ſit æqualis quadruplæ A M plus M E, & A E ſit æqualis A M

minus

minus M E, & positis inter A M minus M E, idest A E, & A M tribus continuè proportionalibus F, & G, & H, vt superius; erit ratio A M minus M E ad F subquadruplicata rationis A M minus M E ad A M. Dico igitur 4 A M ad 4 A M plus M E habere maiorem rationem, quam A M minus M E ad F; nam si fiat, vt 4 A M ad 4 A M plus M E, ita A M minus M E ad aliam, hæc erit minor, quam F; & si continuetur ratio, vt sint quinque continuè proportionales, prima existente A M minus M E, quinta erit minor ipsa A M; quare euidens erit propositio. Continuentur in ratione, quam habent 4 A M ad 4 A M plus M E quinq; continuè proportionales, quarum prima sit A M, minus M E; erit secunda A M minus $\frac{5\ \text{M E}}{4}$ minus $\frac{\text{M E quadrato}}{4\ \text{A M}}$; & tertia erit A M minus $\frac{\text{M E}}{2}$ minus $\frac{7\ \text{M E quadratis}}{16\ \text{A M}}$ minus $\frac{\text{M E Cubo}}{16\ \text{A M quadratis}}$; & quarta erit A M minus $\frac{\text{M E}}{4}$ minus $\frac{9\ \text{M E quadratis}}{16\ \text{A M}}$ minus $\frac{11\ \text{M E Cubis}}{64\ \text{A M quadratis}}$ minus $\frac{\text{M E quadrato quadrato}}{64\ \text{A M Cubis}}$; & quinta, & vltima erit A M minus $\frac{5\ \text{M E quadratis}}{8\ \text{A M}}$ minus $\frac{5\ \text{M E Cubis}}{16\ \text{A M quadratis}}$ minus $\frac{15\ \text{M E quadrato quadratis}}{256\ \text{A M Cubis}}$ minus $\frac{\text{M E quadrato Cubo}}{256\ \text{A M quadrato quadratis}}$, quæ cum deficiat ab A M, idcircò euidens erit conclusio, etiam in hoc casu, quando B E superat B M habere B M ad B E maiorem rationem, quam sit ratio A E ad A M subquadruplicata, quod erat demonstrandum.



PRO-

PROPOSITIONES.

PROPOSITIO I. ZETETICA.

Inuenire maximum rectangulum contentum ſub duobus ſegmentis propoſitæ rectæ lineæ.



It recta linea A B, A———————B quæ ſecanda ſit; ita, vt, quod ſub ſegmentis ſit rectangulum ſit omnium maximum.

Cum methodo huius Analyſis mihi in reliquis ſit vtendum liceat in hac prima longius digredi, vt methodi vis appareat.

Per Analyſim Zeteticam ponatur A B æqualis B, & alteri ſegmento ſit æqualis A: erit reliquum ſegmentum B minus A, ex quibus ſegmentis factum rectangulum erit B in A minus quadrato ex A; vt autem hoc rectangulum ſit omnium maximum inueniendum eſt, quam rationem A debeat habere ad B.

Hoc, vt fiat, ſumenda erit altera maior, aut minor ipſa A, ſed minor, quam B; ſi autem ſit maior ipſa A, quæ ſumitur, erit reſiduum ad B hac detracta minus reſiduo ad B detracta ipſa A; Quare vnius augmentum erit alterius decrementum. Sit igitur alterum ſegmentum A plus E, erit alterum B minus A minus E; & factum ſub ſegmentis erit B in A minus A quadrato minus duplici A in E plus B in E minus E quadrato; Quare differentia inter hoc rectangulum, & ſuperius erit B in E minus duplici A in E minus E quadrato; ideſt, quod

G ſit

fit ex B minus duplici A minus E in E; aut igitur duplex A plus E deficiet à B, aut excedet; si deficiet à B, hoc secundum rectangulum altero maius erit; quare in primo A erit minus, quam dimidium ipsius B, & rectangulum non erit maximum; & si A superet dimidium ipsius B, & B minus A deficiet ab ipso dimidio, ergo etiam rectangulum non erit maximum; Quare cum A non possit neque excedere, neque deficere à dimidio ipsius B, vt sit rectangulum maximum, necesse est A æquari ipsius B dimidio; sed cum instituenda sit Analysis iuxta methodum Analysis maximi, & minimi; cum E vni segmento addatur, & alteri subtrahatur, supponatur æquale nihilo; quodcunq; factum erit in E erit æquale nihilo, & cum differentia à maximo æquetur nihilo, si ea, quæ ducuntur in E, & constituunt differentiã inter se comparentur cognoscetur relatio ipsius A ad B.

Differentia igitur rectangulorum est B in E, minus duplici A in E minus E quadrato æqualis nihilo; ergo per Antithesim erit B in E æqualis duplici A in E plus E quadrato: Si omnia applicentur ipsi E, erit B æqualis duplici A plus E; sed E est æqualis nihilo, ergo B erit æqualis duplici A; ergo tunc fit maximum rectangulum, quando æqualia sunt segmenta. Hinc

PORISMA.

Maximum rectangulum, quod fit sub segmentis datæ rectæ lineæ est id, quod fit quando segmenta sunt inter se æqualia.

Hoc demonstratur ab Euclide lib. 6. Theoremate vigesimo propositione 27. in qua demonstratur.

Omnium Parallelogrammorum secundum eandem lineam

lineam applicatorum deficientiumq; figuris parallelogrammis similibus, similiterq; positis ei, quod à dimidia describitur, maximum est quod ad dimidium applicatur simile existens defectui.

Nam si Parallelográmum deficiens debeat assimilari quadrato erit sub segmentis lineę factū rectangulū Quibus, vt ab Euclide demonstratis nō immorabor, sed hoc p lineas homologas demonstrabo sequēti propositione.

Eadem propositio per lineas homologas data rationali proposita, & demonstrata.

Posita rationali, & linea, quæ secetur vtcunq; si fiat, vt rationalis ad alterum segmentum, ita alterum segmentum ad aliam, hæc erit omnium maxima, quando segmenta erunt æqualia.

Sit data C rationalis, & recta A B, quæ secetur bifariam in D, & non bifariam in E; & fiat, vt C ad A D, ita D B ad F; & vt C ad A E, ita E B ad G. Dico F superare G. Quia, per lemma quintum, D B ad E B habet maiorem rationem, quam A E ad D B, & E B ad G per constructionem eandem, quam C ad A E, habebit ex perturbata Analogia D B ad G maiorem rationem, quam C ad D B; sed vt C ad DB, ita D B ad F; nam D B æqualis est A D, ergo ex eadem perturbata Analogia maiorem rationem habet C ad G, quam ad F, ergo F superat G, quod erat demonstrandum.

A D E B
C
G
F

PROPOSITIO II. ZETETICA.

Inuenire maximum ſolidum, quod fieri poſſit ſub ſegmento propoſitæ rectæ lineæ, & quadrato alterius ſegmenti.



It recta data B oportet ipſam ita ſecare, vt, quod fit ſub altero ſegmento in alterius ſegmenti quadratum ſit omnium maximum eorum, quæ ſub quacunq; alia diuerſa ſectione fieri poſſint.

Sit alterum ſegmentum A, erit alterum B minus A; & quod fit ex B minus A in A quadratum, erit B in A quadratum minus A cubo; determinanda autem ſit ipſa A, vt hoc productum ſit omnium maximum.

Iuxta ſuperiorem methodum ponatur E æquale nihilo, & ſit alterum ſegmentum A plus E, erit alterum B minus A minus E; & quadratum ex A plus E erit A quadratum plus duplici rectangulo ex A in E plus E quadrato, quod ductum in B minus A minus E producet ſolidum B in A quadratum minus A cubo plus duplici ſolido ex B in A in E plus B in E quadratum minus triplici ſolido ex A quadrato in E minus triplici ſolido ex A in E quadratum minus E cubo; & horum genitorum ſolidorum differentia erit duplex ſolidum ex B in A in E plus ſolido ex B in E quadratum minus triplo ſolido ex A quadrato in E minus triplo ſolido ex A in E quadratum minus E cubo æqualis nihilo. Quare omnibus applicatis ad E, & facta Antitheſi, erit duplex B in A minus triplici quadrato ex A æquale triplici re-

ctan-

ctangulo ex A in E plus E quadrato plus B in E, idest nihilo, cum E æquetur nihilo; ergo facta Antithesi, erit duplex B in A æquale triplici A quadrato, & si omnia applicentur ad A, erit duplex B æqualis triplici A, & si omnia diuidantur per tria, erunt duæ tertiæ partes ipsius B æquales ipsi A. Hinc

PORISMA.

Maximum solidum, quod applicatur alicui lineæ deficiens cubo est id, quod tertiæ parti datæ lineæ applicatur, & cubus adiacet duabus tertijs partibus datæ rectæ.

Quod demonstratur ab Eutocio ad Archimedem de Sphera, & Cylindro libro secundo propositione tertia, sed ope conicarum sectionum, & ab insigni nostri seculi Mathematico Bonauentura Caualerio per methodum indiuisibilium. Nos verò Geometricè demonstrabimus sequenti propositione.

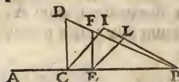
THEOREMA.

Omnium solidorum ad eandem lineam applicatorum, & deficientium figuris solidis, similibus, similiterq; positis maximum est illud, quod ad datæ lineę tertiam partem applicatur.

Sit data linea A B, cuius tertia pars sit A C, cui applicetur solidum ex A C in C D in C I deficiens solido ex C D in C I in C B. Dico esse maximum omnium solidorum, quæ applicari possint ad aliud, atq; aliud eiusdem lineæ segmentum deficientium solido simili, similiterq; posito solido C D in C I in C B.

Su-

Sumatur ipsa A C tertia parte datæ rectæ maior, aut minor quæcunque. Sit primo maior A E, cui applicetur solidum ex A E in E F in E L deficiens solido ex E F in E L in E B simili, similiterq; posito solido ex C D in C I in C B; nam B E ad E F est, vti C B ad C D, & B E ad E L est, vti C B ad C I. Dico solidum ex A C in C D in C I superare solidum ex A E in E F in E L.



Analysis primæ partis.

PER Analysim supponatur solidum ex A C in D C in C I superare solidum ex A E in E F in E L, habebit D C ad E F maiorem rationem, quam factum ex A E in E L ad factum ex A C in C I; sed D C ad E F est, vti B C ad B E; ergo B C ad B E habebit maiorem rationem, quam factum ex A E in E L ad factum ex A C in C I, & factum sub extremis superabit factum sub medijs; ergo solidum ex B C in A C in C I superabit solidum ex B E in A E in E L; ergo factum ex B C in A C ad factum ex B E in A E habebit maiorem rationem, quam E L ad C I; sed, vt E L ad C I, ita B E ad B C: ergo factum ex B C in A C ad factum ex B E in A E habebit maiorem rationem, quam B E ad B C, & factum sub extremis superabit factum sub medijs; ergo factum ex B C quadrato in A C superabit factum ex B E quadrato in A E; quia autem B C est æqualis duplici A C, & B E est æqualis duplici A C minus C E, & A E est æqualis A C plus C E, si fiat in-

interpretatio, erit factum ex B C quadrato in A C æquale quadruplo cubo ex A C, & factum ex B E quadrato in A E erit æquale quadruplo cubo ex A C minus triplo solido ex A C in C E quadratum plus C E cubo; Quamobrem quadruplus cubus ex A C superabit quadruplum cubum ex A C minus triplo solido ex A C in C E quadratum plus cubo ex C E; & si fiat Antithesis, quadruplus cubus ex A C, plus triplo solido ex A C in C E quadratum superabit quadruplum cubum ex A C plus cubo ex C E; & si demantur communia, erit triplum solidum ex A C in C E quadratum maius cubo ex C E; & si omnia applicentur ad C E quadratum, erit tripla A C maior C E, quod patet. Quare certa conclusio nunc ad Synthesim.

Synthesis primæ partis.

QVia A B est æqualis triplæ A C, & A B superat C E, erit tripla A C maior, quam C E, & factum ex tripla A C in C E quadratum superabit C E cubum, & si vtriq; quantitati addatur quadruplus cubus ex A C, erit aggregatum ex quadruplo cubo ex A C plus triplo solido ex A C in C E quadratum maius aggregato ex quadruplo cubo ex A C plus cubo ex C E, & facta Antithesi, quadruplus cubus ex A C superabit quadruplum cubum ex A C minus triplo solido ex A C in C E quadratum plus cubo ex C E; Quia verò B C est æqualis duplici A C, erit quadruplus cubus ex A C æqualis facto ex B C quadrato in A C; item quia B E est æqualis duplici A C minus C E, & A E est æqualis A C plus C E; si fiat interpretatio

erit

erit quadruplus cubus ex A C minus triplo solido ex A C in CE quadratum plus cubo ex C E æquale facto ex B E quadrato in A E; Quamobrem factum ex B C quadrato in A C superabit factum ex B E quadrato in A E, & factum ex B C in A C ad factum ex B E in A E habebit maiorem rationem, quam B E ad B C; sed vt B E ad B C, ita E L ad C I, ergo factum ex B C in A C ad factum ex B E in A E habebit maiorem rationem, quam E L ad C I; ergo solidum ex B C in A C in C I superabit solidum ex B E in A E in E L; ergo B C ad B E habebit maiorem rationem, quam factum ex A E in E L ad factum ex A C in C I; sed, vt B C ad B E, ita est D C ad E F: ergo D C ad E F habebit maiorem rationem, quam factum ex A E in E L ad factum ex A C in C I; ergo solidum ex D C in A C in C I superabit solidum ex A E in E L in E F, idest solidum applicatum tertiæ parti datæ rectæ superabit solidum applicatum parti maiori, quam sit tertia pars datæ rectæ, quod erat primo loco demonstrandum.

Analysis secundæ partis.

SIT secundo A E minor, quam A C, cui applicetur solidum ex A E in E F in E L deficiens solido ex E F in E L in E B simili, similiterq; posito solido ex C D in C I in C B. Dico solidum ex A C in C D in C I superare solidum ex A E in E F in E L. Per Analysim supponatur solidum ex A C in C D in C I superare solidum ex A E in E F in E L, habebit C D ad E F maiorem rationem, quam factum ex A E in E L ad factum ex A C in C I; sed D C ad E F est, vti B C

 ad

ad B E; ergo B C ad B E habebit maiorem rationem, quam factum ex A E in E L ad factum ex A C in C I, & factum sub extremis superabit factum sub medijs; ergo solidum ex B C in A C in C I superabit solidum ex B E in A E in E L; ergo factum ex B C in A C ad factum ex B E in A E habebit maiorem rationem, quam E L ad C I; sed vt E L ad C I, ita B E ad B C; ergo factum ex B C in A C ad factum ex B E in A E habebit



maiorem rationem, quam B E ad B C, & factum sub extremis superabit factum sub medijs; ergo factum ex B C quadrato in A C superabit factum ex B E quadrato in A E, quod patet; Quia cum B C sit æqualis duplici A C, & B E sit æqualis duplici A C plus C E, & A E sit æqualis A C minus C E; si fiat interpretatio, erit factum ex B C quadrato in A C æquale quadruplo cubo ex A C; & factum ex B E quadrato in A E erit æquale quadruplo cubo ex A C minus triplici solido ex A C in C E quadratum, minus cubo ex C E; Quare certa conclusio. Hinc ad Synthesim.

Synthesis secundæ partis.

QVia quadruplus cubus ex A C superat quadruplum cubum ex A C minus triplici solido ex A C in C E quadratum minus cubo ex C E; & quadruplo cubo ex A C æquale est factum ex B C quadrato in A C, quia B C est æqualis duplici A C; item quadruplo cubo ex A C minus triplici solido ex A C in C E quadratum minus cubo ex C E est æquale factum ex B E

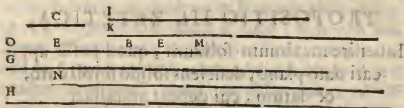
quadrato in A E, quia B E est æqualis duplici A C plus C E, & A E est æqualis A C minus C E; etiam factum ex B C quadrato superabit factum ex B E quadrato in A E; Quare factum ex B C in A C ad factum ex B E in A E habebit maiorem rationem, quam B E ad B C; sed, vt B E ad B C, ita E L ad C I; ergo factum ex B C in A C ad factum ex B E in A E habebit maiorem rationem, quam E L ad C I, & solidum ex B C in A C in C I superabit solidum ex B E in A E in E L, & factum ex A C in C I ad factum ex A E in E L habebit maiorem rationem, quam B E ad B C; sed vt B E ad B C, ita E F ad D C; ergo factum ex A C in C I ad factum ex A E in E L habebit maiorem rationem, quam E F ad D C, & factum sub extremis superabit factum sub medijs; factum igitur ex A C in C I in C D superabit factum ex A E in E L in E F, idest solidum applicatum tertiæ parti datæ lineæ superabit solidum applicatum parti minori, quam sit tertia pars datæ lineæ simili existente defectu, quod erat probandum; Cum autem demonstratum sit superare etiam id, quod applicatur parti maiori, ideò certa conclusio.

Eadem propositio secunda demonstrata, & proposita per lineas homologas, data rationali.

Datis duabus rectis lineis, quarum altera se habens loco rationalis sit non secta; altera

verò

verò secta vtcunq; , & alterum segmentum sectæ habeat ad aliam lineam rationem duplicatam eius, quam habet rationalis ad alterum segmentum. Dico hanc lineam fore omnium maximam, quando segmentum ad quod refertur rationalis erit æquale duabus tertijs partibus datæ rectæ.



SIt recta quæcunq; C, quæ ponatur, vti rationalis, & altera O M, quæ secetur in B, & E; & fiat, vt C ad O B, ita O B ad G, &, vt C ad G, ita B M ad H.

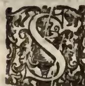
Item, vt C ad O E, ita O E ad I, &, vt C ad I, ita E M ad K; O B verò sit æqualis duabus tertijs partibus ipsius O M; O E verò vel duas tertias partes superet, vel ipsis cedat. Dico H superare K.

Fiat vt G ad H, ita I ad N; Quia C, & O B, & G; item C & O E, & I sunt duæ series continuè proportionalium ab eadem C incipientiũ, per lemma secundũ habebit I ad G duplicatam rationem eius, quam habet O E ad O B; item, qnia, vt C ad G, ita B M ad H, erit, vt C ad B M, ita G ad H; item quia, vt C ad I, ita E M ad K, erit, vt C ad E M, ita I ad K. Tum considerentur tres rectæ I, G, H, & I, N, K; Quia, vt C

ad E M, ita I ad K, & vt G ad H, ideſt C ad B M, ita I ad N, erit N ad K, vt B M ad E M; ſed per lemma ſextum B M ad E M habet maiorem rationem, quam I ad G; ergo N ad K habebit maiorem rationem, quam ſit ratio duplicata O E ad O B, ideſt quam I ad G; vt autem G ad H, ita I ad N; ergo per perturbatam Analogiam I ad K habet maiorem rationem, quam ad H, ergo H ſuperat K.

PROPOSITIO III. ZETETICA.

Inuenire maximum ſolidum, quod poſſit applicari dato plano, deficiens ſolido ſimili dato, & datum, cui debeat aſſimilari defectus ſit cubus.



It datum B planum, & oporteat illud ita ſecare, vt ſi alteri ſegmento applicetur ſolidum deficiens cubo ſit maximum omniũ, quæ poſſint applicari deficientium figura ſimili, ſimiliterque poſita.

Cum defectus debeat eſſe cubus, oportet planum datum applicare lateri cubi defectiui. Sit illud latus A, erit alterum latus, quod exurget ex applicatione B plani ad A; ideſt $\frac{B\ planum}{A}$, quod in duo ſegmenta ſecabitur, quorum alterum erit A, alterum erit $\frac{B\ planum}{A}$ minus A, quæ pars ducta in ipſius A quadratum exurget planum applicatum, ideſt B planum in A minus A cubo; reliquum eſt, vt determinetur quantitas ipſius A, vt B planum in A minus A cubo ſit maximum.

Per ſuperiorem Methodum ſit E æquale nihilo, & ſu-

ſumatur A plus E pro vno latere, ad quod applicetur B planum, erit latus alterum ex applicatione exurgens $\frac{B \text{ planum}}{A \text{ plus } E}$, cuius alterum ſegmentum erit A plus E, alterum $\frac{B \text{ planum}}{A \text{ plus } E}$ minus A minus E. Hoc vltimum ſegmentum ductum in quadratum ex latere A plus E; ideſt in quadratum ex A plus duplici rectangulo ex A in E plus quadrato ex E, erit planum applicatum, ideſt B planum in A plus B plano in E minus A cubo minus triplici ſolido ex A quadrato in E minus triplici ſolido ex A in E quadratum minus E cubo; & horum ſolidorum differentia erit B planum in E minus triplici ſolido ex A quadrato in E minus triplici ſolido ex A in E quadratum minus E cubo, quæ differentia æquabitur nihilo; Quare facta Antitheſi, erit B planum in E æquale triplici ſolido ex A quadrato in E plus triplici ſolido ex A in E quadratum plus E cubo; & ſi vtraq; pars applicetur ad E, erit B planum æquale triplici quadrato ex A plus triplici rectangulo ex A in E plus quadrato ex E; & quia E ſupponitur æquari nihilo, erit etiam factum in E æquale nihilo. Quare B planum æquabitur triplici quadrato ex A: Tertia igitur pars ipſius B plani erit quadratum ex A. Quocirca maximum ſolidum erit, quod ad duas ex tribus partibus B plani applicabitur: ſumenda igitur erit ipſius B plani pars tertia, & inquirendum latus, quod ipſam poteſt, ad quod applicato B plano exurget longitudo tripla lateris, cui facta eſt applicatio, cuius duæ partes in reliquæ quadratum ductæ conſtituent maximum ſolidum applicatum deficiens cubo. Hinc

PO-

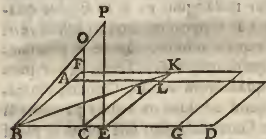
PORISMA.

Maximum solidum, quod potest applicari dato plano deficiens cubo est id, quod applicatur duabus tertijs partibus dati plani.

THEOREMA.

Omnium solidorum ad idem planum applicatorum, & deficientium figuris solidis similibus, similiterq; positis maximum est id, quod ad duas tertias partes dati plani applicatur.

Sit planum datum A B in B D, & B C sit æqualis tertiæ parti ipsius B D, erit A B, seu C I in B C tertia pars plani dati, & C I in C D æquabit reliquas duas tertias partes dati plani. Fiat ex C I in C D in C O solidum deficiens solido ex C I in C B in C O. Dico hoc fore maximum omnium eorum, quæ applicari poterint dato plano deficientium solido simili similiterq; posito solido ex C I in C B in C O.



Fiat planum F B in B G æquale plano dato A B in B D, & sumatur B E maior B C; & compleatur figura B E in E K similis figuræ B C in C I; & vt B C ad B E, ita fiat C O ad E P; erit solidum ex E K in E B in E P simile, similiterq; positum solido ex C I in C B in C O;

&

& solidum ex E P in E K in E G erit applicatum minori parti dati plani, quam sint ipsius duæ tertiæ partes (cum B E in E K superet B C in C I tertiam partem dati plani) deficiens solido simili, similiterq; posito ei, quo deficit planum applicatum duabus tertijs partibus dati plani. Quare

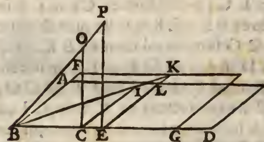
Dico primo solidum ex C I in C D in C O superare solidum ex E K in E P in E G.

Analysis primæ partis.

SVperet solidum ex C I in C D in C O solidum ex E K in E P in E G; & solidum ex C I in C B in C O sit simile solido ex B E in E K in E P; quia solidum ex C I in C D in C O superat solidum ex E K in E P in E G, habebit C D in C I ad G E in E K maiorem rationem, quam E P ad C O; sed vti E P ad C O, ita est B E ad B C; ergo factum ex C D in C I ad factum ex G E in E K habebit maiorem rationem, quam B E ad B C; sed G E in E K æquatur facto ex C I in B D minus facto ex B E in E K; ergo factum ex C D in C I ad factum ex C I in B D minus facto ex B E in E K habet maiorem rationem, quam B E ad B C; & factum sub extremis superabit factum sub medijs; ergo solidum ex B C in C D in C I superabit solidum ex B E in C I in B D minus solido ex B E quadrato in E K; & per Antithesim solidum ex B C in C D in C I, vna cum solido ex B E quadrato in E K superabit solidum ex B E in C I in B D: Quia verò C D est æqualis duplici B C, erit solidum ex B C in C D in C I æquale solido ex duplici B C quadrato in C I; item,

quia

quia B E eſt æqualis B C plus C E, & B D eſt æqualis triplici B C, erit factum ex B E in B D æquale triplici B C quadrato plus triplici rectangulo ex C E in B C: idcircò factum ex B E in C I in B D erit æquale facto ex triplici B C quadrato in C I plus triplici ſolido ex B C in C E in C I; Quare interpretando factum ex duplici quadrato ex B C in C I, vna cum facto ex B E quadrato in E K ſuperabit ſolidum ex triplo quadrato B C in C I, vna cum ſolido ex tripla B C in C E in C I; & demptis communibus, ideſt facto ex duplici quadrato ex B C in C I, erit factum ex B E quadrato in E K maius ſolido ex B C quadrato in C I, vna cum ſolido ex tripla B C in C E in C I; Quare B E quadratum ad quadratum ex B C plus triplo facto ex B C in C E habebit maiorem rationem, quam C I ad E K, ſeu per conſtructionem, quam B C ad B E; ergo factum ſub extremis ſuperabit factum ſub medijs; Quare cubus ex B E ſuperabit cubum ex B C plus triplici ſolido ex B C quadrato in C E, quod patet; quia interpretando B E in B C plus C E erit cubus ex B E æqualis cubo ex B C plus triplici ſolido ex B C quadrato in C E plus triplici ſolido ex C E quadrato in B C plus cubo ex C E. Quare ad Syntheſim.



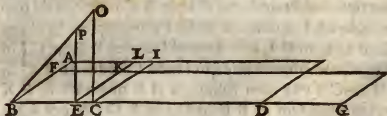
Synthesis primæ partis.

QVia B E est æqualis B C plus C E, erit cubus ex B E æqualis cubo ex B C plus triplici solido ex B C quadrato in C E plus triplici solido ex C E quadrato in B C plus cubo ex C E; quare superabit cubum ex B C plus triplici solido ex B C quadrato in C E; & ideò B E quadratum ad B C quadratum plus triplici facto ex B C in C E habebit maiorem rationem, quam B C ad B E, idest C I ad E K, & factum sub extremis superabit factum sub medijs; solidum igitur ex quadrato B E in E K superabit solidum ex B C quadrato in C I, vna cum solido ex triplici B C in C E in C I; vtrique parti addatur factum ex duplici quadrato B C in C I; factum ex duplici quadrato ex B C in C I vna cum facto ex B E quadrato in E K superabit solidum ex triplici quadrato B C in C I vna cum solido ex tripla B C in C E in C I. Quia verò C D est æqualis duplici B C, erit factum ex duplici quadrato ex B C in C I æquale solido ex B C in C D in C I; & quia B E est æqualis B C plus C E, & B D est æqualis triplici B C, erit factum ex B E in B D æquale triplici B C quadrato plus triplici rectangulo ex C E in B C; idcircò factum ex triplici B C quadrato in C I plus triplici solido ex B C in C E in C I, erit æquale facto ex B E in C I in B D. Quamobrem interpretando solidum ex B C in C D in C I vna cum solido ex B E quadrato in E K superabit solidum ex B E in C I in B D; & per Antithesim solidum ex B C in C D in C I superabit soli-

dum ex B E in B D in C I minus ſolido ex quadrato B E in E K; ergo factum ex C D in C I ad factum ex C I in B D minus facto ex B E in E K habebit maiorem rationem, quam B E ad B C; ſed factum ex C I in B D minus facto ex B E in E K eſt factum ex G E in E K; (nam C I in B D per conſtructionem æquatur facto ex E K in B G.) ergo factum ex C D in C I ad factum ex G E in E K habet maiorem rationem, quam B E ad B C; ſed, vt B E ad B C, ita eſt E P ad C O: ergo factum ex C D in C I ad factum ex G E in E K habet maiorem rationem, quam E P ad C O; ergo C D in C I in C O ſuperat E P in E G in E K, quod erat demonſtrandum. Solidum igitur, quod applicatur duabus tertijs partibus dati plani deficiens ſolido ſimili dato ſuperat ſolidum, quod applicatur parti minori, quam ſint duæ tertiæ partes dati plani deficiens ſolido ſimili, ſimiliterq; poſito. Reliquum eſt vt demonſtretur ſuperare etiam id, quod applicatur parti maiori, quã ſint duæ tertiæ dati plani; Quare ad Analyſim ſecũdæ partis.

Analyſis ſecundæ partis.

SIt in diagrammate ſecundo planũ datum A B in B D, & B C ſit æqualis tertiæ parti ipſius B D, erit C I

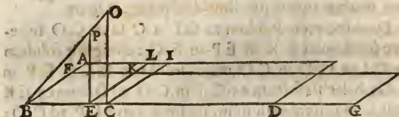


in B C tertia pars plani dati, & C I in C D æquabit reliquas

reliquas duas tertias partes; fiat ex C I in C D in C O solidum deficiens solido ex C I in C B in C O. Tum facto plano F B in B G æquali plano dato ex A B in B D, sumatur B E minor, quam B C, completaque figura B E in E K, quæ sit similis figuræ B C in C I; & vt B C ad B E, ita fiat C O ad E P; ita, vt solidum ex E K in E B in E P sit simile, similiterq; positum solido ex C I in C B in C O, & solidum ex E P in E K in E G erit applicatum parti maiori dati plani, quam sint ipsius duæ tertiæ partes, cum B E in E K deficiat à B C in C I tertia parte dati plani, & deficiet solido simili, similiterq; posito ei, quo deficit planum applicatum duabus tertijs partibus dati plani. Quare

Dico secundo solidum ex C I in C D in C O superare solidum ex E K in E P in E G. Sit igitur solidum ex C I in C D in C O maius solido ex E K in E P in E G, habebit factum ex C I in C D ad factum ex E K in E G maiorem rationem, quam sit ratio E P ad C O; sed E P ad C O est vti B E ad B C; & quia per constructionem factum ex C I in B D æquatur facto ex E K in B G, erit factum ex E K in E G æquale facto ex C I in B D, minus facto ex B E in E K; ergo factum ex C I in C D ad factum ex C I in B D minus facto ex B E in E K habet maiorem rationem, quam B E ad B C, & factum sub extremis superabit factum sub medijs. Quare solidum ex C I in B C in C D superabit solidum ex C I in B D in B E minus solido ex B E quadrato in E K; & per Antithesim solidum ex B E quadrato in E K maius erit solido ex C I in B D in B E minus solido ex C I in B C in C D; & quia

B D æquatur triplici B C, & C D duplici B C, & B C æquatur B E plus C E, erit per interpretationem C I in B D in B E æquale triplici solido ex C I in B C in B E, & C I in B C in C D erit æquale facto ex duplici C I in B C in B E plus duplici solido ex C I in B C in C E. Solidum igitur ex C I in B C in B E minus solido ex C I in B C in B D erit æquale solido ex C I in B C in B E minus duplici solido ex C I in B C in C E; quare solidum ex B E quadrato in E K superat solidum ex C I in B C in B E minus duplici solido ex C I in B C in C E; Quadratum igitur ex B E ad factum ex B C in B E minus duplici facto ex B C in C E habet



maiorem rationem, quam C I ad E K, idest B C ad B E; & cubus ex B E superabit solidum ex quadrato B C in B E minus duplici facto ex B C quadrato in C E, idest (quia B E æquatur B C minus C E) cubum ex B C minus triplici facto ex B C quadrato in C E; cubus autem ex B E est cubus ex B C minus C E, idest cubus ex B C minus triplici facto ex B C quadrato in C E plus triplici facto ex C E quadrato in B C minus cubo ex C E; cum autem superet cubum ex B C minus triplici facto ex B C quadrato in C E, si fiat Antithesis, & tollantur communia, erit triplex factum ex C E quadrato in B C maius cubo ex C E, quod patet, quia B C superat C E. Quare ad Synthesim. Syn-

Synthesis secundæ partis.

QVia triplex factum, ex quadrato C E in B C superat cubum ex C E; nam B C superat C E; si vtriq; parti addatur cubus ex B C minus triplici facto ex quadrato B C in C E minus cubo ex C E, etiam cubus ex B C minus triplici facto ex B C quadrato in C E plus triplici facto ex C E quadrato in B C minus cubo ex C E; idest per interpretationem cubus ex B E (nam B E est æqualis B C minus C E) erit maior cubo ex B C minus triplici facto ex B C quadrato in C E, idest facto ex B C quadrato in B E minus duplo facto ex B C quadrato in C E; ergo B E quadratum ad factum ex B C in B E minus duplici facto ex B C in C E habebit maiorem rationem, quam B C ad B E, idest C I ad E K; & solidum ex B E quadrato in E K erit maius solido ex B E in B C in C I minus duplici solido ex B C in C E in C I; & quia B D æquatur triplici B C, & C D æquatur duplici B C, & C E æquatur B C minus B E, erit solidum ex B E in B C in C I minus duplici solido ex B C in C E in C I æquale solido ex C I in B D in B E minus solido ex C I in B C in C D. Quare solidum ex B E quadrato in E K maius erit solido ex C I in B D in B E minus solido ex C I in B C in C D; & per Antithesim solidum ex C I in B C in C D maius erit solido ex C I in B D in B E minus solido ex B E quadrato in E K: Quare factum ex C I in C D ad factum ex C I in B D minus facto ex B E in E K habet maiorem rationem, quam B E ad B C; sed quia factum ex C I in B D

est

est æquale facto ex E K in B G, erit factum ex C I in B D minus facto ex B E in E K æquale facto ex E K in E G: Quare factum ex C I in C D ad factum ex E K in E G habebit maiorem rationem, quam B E ad B C; sed vti B E ad B C, ita est E P ad C O: ergo factum ex C I in C D ad factum ex E K in E G habet maiorem rationem, quam E P ad C O; & factum sub extremis superabit factum sub medijs; ergo solidum ex C I in C D in C O superabit solidum ex E K in E G in E P, quod erat demonstrandum.

Cum igitur demonstratum sit solidum, quod applicatur duabus tertijs partibus dati plani superare tam id, quod applicatur parti minori, quam sint duæ tertiæ partes dati plani, quam id, quod applicatur parti maiori cum defectu simili, similiterq; posito patet id esse omnium maximum, quod sumpsimus demonstrandum.

SCHOLIVM.

VT hæc propositio proponatur, & demonstretur per lineas homologas data rationali, aduertendum est, quando quæritur maximum solidum, quod applicari possit dato plano deficiens cubo, id obtineri secto dato plano, ita, vt altero segmento in quadratum efformato, si reliquum dati plani applicetur lateri effecti quadrati; & fiat parallelepipedum, cuius basis sit reliquum dati plani, & altitudo latus effecti quadrati, id sit omnium maximum. Vt autem hæc omnia ad lineas homologas reducantur, posita linea rationali, quærenda prius erit linea, quæ sit similis dato plano, iuxta ea, quæ in Isagoge docuimus, quæ erit tertia proportionalis, posita rationali prima,

&

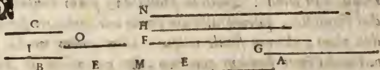
& ea, quæ potest datum planum secunda; tum etiam inuenienda est similis quadrato segmenti dati plani, quæ erit tertia proportionalis, posita rationali prima, & ea, quæ potest segmentum dati plani secunda, quæ si subtrahatur à simili dato plano, cum sit ipsa minor (nam est similis ipsius parti) reliqua erit similis reliquo dati plani: Quocirca similis dato plano diuisa erit in duo segmenta, quorum alterum simile erit quadrato segmenti dati plani, alterum simile reliquo. Cum autem media proportionalis inter similem quadrato, & rationalem sit similis lateri quadrati, & quod fit ex simili residuo plani in similem lateri quadrati sit simile solido, quod applicatur plano deficiens cubo; in hoc recidet quæstio, vt posita rationali, ita secetur linea similis dato plano, vt similis ei, quod fit ex altero segmento ducto in mediam proportionalem inter rationalem, & aliud segmentum sit omnium maxima; & demonstrabimus, tunc fore omnium maximam, quando alterum segmentum, quod ducitur in medio loco proportionalem inter rationalem, & alterum segmentum fuerit alterius segmenti duplum; Quare ita proponi poterit.

Eadem propositio proposita, & demonstrata per lineas homologas, data rationali.

Datis duabus rectis lineis, quarum altera, se habens loco rationalis sit non secta, altera verò secta vtcunq; & alterum segmentum sectæ habeat ad aliam rationem subduplicatam eius, quam habet rationalis ad alterum

terum ſegmentum. Dico hanc fore omnium maximam, quando ſegmentum illud fuerit alterius duplum.

SIt data rationalis C, & altera B A, quæ prius



ſecetur in M; ita, vt M A ſit dupla ipſius B M, ſecundo; vtcunq; in E; ita vt B E ſit maior, aut minor, quam B M, & I ſit medio loco proportionalis inter C, & B M, & O inter C, & B E, & fiat, vt C ad I, ita M A ad F, & vt C ad O, ita E A ad H. Dico F ſuperare H; quia cum C & I, & B M, item C & O, & B E ſint duæ ſeries continuè proportionalium ab eadem incipientium habebit B M ad B E, per lemma ſecundum, duplicatam rationem eius, quam habet I ad O: Si igitur inter B M, & B E ponatur media proportionalis, verbigratia G, habebit B M ad G eam rationem, quam habet I ad O; ſed, per lemma ſeptimum, B M ad G habet maiorem rationem, quam A E ad A M, ergo I ad O habebit maiorem rationem, quam A E ad A M; tum ſic

Fiat, vt O ad H, ita I ad N; tum conſiderentur tres quantitates I, O, H, & aliæ tres I, N, F,

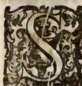
Quia vt C ad M A, ita I ad F, & vt O ad H, ita C ad E A, erit ratio I ad F minus ratione O ad H æqualis rationi E A ad M A, ſed, vti O ad H, ita facta eſt ratio I ad N, ergo ratio N ad F erit æqualis

rationi

rationi E A ad M A ; ergo I ad O habebit maiorem rationem, quam N ad F, sed vt O ad H, ita I ad N; ergo per rationem perturbatam I ad H habebit maiorem rationem, quam ad F; ergo F superat H, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO IV. ZETETICA.

Inuenire maximum plano planum, quod possit applicari datæ lineæ deficiens plano plano simili dato, & datum, cui debeat assimilari defectus sit quadrato quadratum.



IT data recta B, cui applicandum sit plano planum deficiens quadrato quadrato, quod sit omnium maximum; oportebit, ita secare datam B, vt quod fit ex altero segmento in alterius segmenti cubum sit omnium maximum.

Sit rectæ B alterum segmentum A erit alterum B minus A, & plano planum applicatum erit id, quod fit ex B in A cubum minus A quadrato quadrato; determinanda autem est proportio partium A, & B minus A, vt hoc productum sit omnium maximum.

Iuxta traditam methodum ponatur E æquale nihilo, & fiat alterum segmentum A plus E, & alterum B minus A minus E. Cubus ex A plus E erit æqualis cubo ex A plus triplici solido ex A quadrato in E plus triplici solido ex E quadrato in A plus cubo ex E; quæ omnia si ducantur in B minus A minus E, exurget plano planum ex B in A cubum plus triplici plano

plano ex B in A quadratum in E plus triplici plano plano ex B in E quadratum in A plus plano plano ex B in E cubum minus A quadrato quadrato minus quadruplici plano plano ex A cubo in E minus sextuplo plano plano ex E quadrato in A quadratum minus quadruplici plano plano ex A in E cubum minus quadrato quadrato ex E; à quo facto si dematur factum ex B in A cubum minus A quadrato quadrato, erit reliquum æquale nihilo; quare facta Antithesi triplex plano planum ex B in A quadratum in E plus triplici plano plano ex B in A in E quadratum plus plano plano ex B in E cubum erit æquale quadruplo plano plano ex A cubo in E plus sextuplo plano plano ex E quadrato in A quadratum plus quadruplo plano plano ex A in E cubum plus E quadrato quadrato; & si omnia applicentur ad E; erit triplex solidum ex B in A quadratum plus triplici solido ex B in A in E plus solido ex B in E quadratum æquale quadruplo cubo ex A plus sextuplo solido ex E in A quadratum plus quadruplo solido ex A in E quadratum plus E cubo; & quia E æquatur nihilo, reiectis omnibus ijs, quæ non potuerunt liberari ab E; erit triplex solidum ex B in A quadratum æquale quadruplo cubo ex A; & si vtraq; pars applicetur ad A quadratum, erit triplex B æquale quadruplici A; & A, vndè efficitur quadrato quadratum erit æquale tribus ex quatuor partibus ipsius B; & reliqua quarta pars ipsius B erit illa, cui applicandum erit maximum plano planum. Hinc

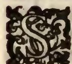
PO-

PORISMA.

Maximum plano planum, quod applicatur datæ lineæ deficiens quadrato quadrato est id, quod applicatur quartæ parti datæ lineæ, & quadrato quadratum, quod deficit occupat tres quartas partes datæ lineæ.

THEOREMA.

Omnium plano planorum ad eandem lineam applicatorum, & deficientium plano planis similibus, similiterq; positis maximum est id, quod quartæ parti datæ lineæ applicatur.



IT data recta A B, cuius quarta pars sit A C, & A E primo superet A C, & parallelogrammum ex B C in C I sit simile parallelogrammo ex B E in E L. Fiat autem, vt quadratum ex B C ad quadratum ex B E, ita C D ad E F; erunt per definitionem primam facta ex B C in C I in C D, & ex B E in E L in E F duo plano plana similia, cum sint parallelepipeda super similibus basibus constituta, quorum altitudines sunt in duplicata ratione laterum homologorum similium basium; Quocirca facta parallelepipeda ex A C in C D in C I, & ex A E in E F in E L erunt plano plana eidem lineæ A B applicata deficientia plano planis similibus similiterq; positis, quorum factum ex A C in C D in C I applicatum est quartæ parti datæ lineæ; alterum verò scilicet factum ex A E in E F in E L applicatum est parti maiori, quam sit quarta pars datæ lineæ. Quare dico primo factum ex A C in C D in C I superare factum ex A E in E F in E L.

Analysis primæ partis.

Quia parallelepipedum ex A C in C I in C D supponitur superare parallelepipedum ex A E in E L in E F, habebit C I ad E L maiorem rationem, quam factum ex A E in E F ad factum ex A C in C D; sed C I ad E L est, vt B C ad B E; seu per interpretationem, vt tripla A C ad triplam A C minus C E; ergo tripla A C ad triplam A C minus C E habebit maiorem rationem, quam factum ex A E in E F ad factum ex A C in C D; sed E F ad C D est, vti quadratum ex B E ad quadratum ex B C; ergo factum ex A E in E F ad factum ex A C in C D erit, vt factum ex A E in quadratum ex B E ad factum ex A C in quadratum ex B C; Quare tripla A C ad triplam A C minus C E habebit maiorem rationem, quam factum ex A E in quadratum ex B E ad factum ex A C in quadratum ex B C; sed quadratum ex B E idem est, ac quadratum ex tripla A C minus C E, idest noncuplum quadratum ex A C minus sextuplo rectangulo ex A C in C E plus quadrato ex C E; & quadratum ex B C idem est, ac quadratum ex tripla A C, idest noncuplum ipsius A C quadratum, & A E est æqualis A C plus C E; Quare per interpretationem factum ex A E in quadratum ex B E erit factum ex A C plus C E in quadratum ex tripla A C minus C E; idest noncuplum cubi ex A C plus triplo solido ex A C quadrato in

D F I L A C E B

C E minus quintuplo solido ex A C in C E quadratum plus cubo ex C E; factum verò ex A C in quadratum ex B C erit noncuplum cubi ipsius A C; Quare tripla A C ad triplam A C minus C E habebit maiorem rationem, quam noncuplum cubi ex A C plus triplo solido ex A C quadrato in C E minus quintuplo solido ex A C in C E quadratum plus cubo ex C E ad noncuplum cubi ex A C; & factum sub extremis superabit factum sub medijs; igitur vicesimum septuplum quadrato quadratum ex A C superabit vicesimum septuplum quadrato quadratum ex A C minus plano plano decies octies sumpto ex A C quadrato in quadratum C E plus octuplo plano plano ex A C in C E cubum minus quadrato quadrato ex C E; & reiecto communi vicesimo septuplo quadrato quadrato ex A C, & facta Antithesi, erunt decem, & octo plano plana ex A C quadrato in C E quadratum maiora octuplo plano plano ex A C in C E cubum minus quadrato quadrato ex C E, & si omnia applicentur ad quadratum ex C E erunt decem, & octo quadrata ex A C maiora octuplo facto ex A C in C E minus quadrato ex C E, quod verum esse patebit ex sequenti lemmate.

L E M M A.

Datis duabus rectis lineis; ita vt altera deficiat ab alterius tripla erunt decem, & octo vnius quadrata simul sumpta maiora octu-

plo

plo ſub ipſis rectangulo minus alterius quadrato.

A ———————

B ———————————

SInt duæ rectæ datæ A, & B, & B deficiat à tripla ipſius A. Dico decem, & octo quadrata ipſius A ſimul ſumpta ſuperare octuplum rectangulum ex A in B minus quadrato ipſius B.

Plures caſus habet hæc propoſitio, aut enim B deficit ab A, aut eſt æqualis, aut ſuperat, & deficit à dupla, aut eſt æqualis duplæ, aut ſuperat duplam, ſed deficit à tripla.

Si B deficit ab A, aut eſt ipſi æqualis patet propoſitio; nam octuplum ſub ipſis rectangulum, aut deficiet ab octo quadratis ipſius A, aut æquabit; vtcunque ſit ſemper deficiet à decem, & octo quadratis.

Sit B maior quam A, ſed deficiat ab ipſius dupla; ſit autem æqualis A plus I; ergo I deficiet ab A, & octuplum rectangulum ex A in A plus I erit æquale octuplo quadrato ipſius A plus octuplo rectangulo ex A in I, ſed cum I deficiat ab A octuplum rectangulum ex A in I deficiet ab octuplo quadrato ipſius A; ergo octuplum rectangulum ex A in A plus I deficiet à ſexdecim quadratis ipſius A; ergo multo magis à decem, & octo, & defectus erit maior ſi tollatur etiam quadratum ex A plus I.

Sit B æqualis duplici A erit octuplum rectangulum ex A in B æquale ſexdecim quadratis ex A, & ſi auferatur quadratum ex B, ideſt quadruplum quadratum ipſius A, quia B eſt æqualis duplici A remanebunt

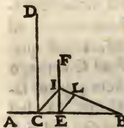
qua-

quatuordecim quadrata ex A, quæ minus sunt, quam decem, & octo.

Sit B æqualis duplici A plus I, & I deficiat ab A erit octuplum rectangulum ex A in B minus B quadrato æquale duodecuplo quadrato ex A plus quadruplo rectangulo ex A in I minus quadrato ex I; & quia I deficit ab A, etiam quadruplum rectangulum ex A in I deficiet à quadruplo quadrato ex A; quare totum deficiet à decem, & octo quadratis ex A, quod erat demonstrandum. Quare ad Synthesim.

Synthesis primæ partis.

QVia C E deficit à tripla A C, erunt decem, & octo quadrata ex A C maiora octuplo plano ex A C in C E minus quadrato ex C E, & si omnia ducantur in quadratum ex C E, erunt decem, & octo plano plana ex quadrato A C in quadratum ex C E maiora octuplo plano plano ex A C in C E cubum, minus quadrato quadrato ex C E; si vtriq; parti addatur vicesimum septuplum quadrato quadratum ex A C, & fiat Antithesis; erunt viginti septem quadrato quadrata ex A C maiora viginti septem quadrato quadratis ex A C minus decem, & octo plano planis ex quadrato A C in C E quadratum plus octuplo plano plano ex A C in C E cubum minus quadrato quadrato ex C E; & quia vicesimum septuplum quadrato quadratum ex A C fit ex tripla A C in noncuplum cubi ex A C, & vicesimum septuplum quadrato quadratum



dratum ex A C minus decem, & octo plano planis ex quadrato A C in C E quadratum plus octuplo plano plano ex A C in C E cubum minus quadrato quadrato ex C E fit ex tripla A C minus C E in noncuplum cubi ex A C plus triplo solido ex A C quadrato in C E minus quintuplo solido ex A C in C E quadratum plus cubo ex C E; habebit tripla A C ad triplam A C minus C E maiorem rationem, quam noncuplum cubi ex A C plus triplo solido ex A C quadrato in C E minus quintuplo solido ex A C in C E quadratum plus cubo ex C E ad noncuplum cubi ex A C: & quia noncuplum cubi ex A C plus triplo solido ex A C quadrato in C E minus quintuplo solido ex A C in C E quadratum plus cubo ex C E est factum ex A C plus C E, idest A E in quadratum ex tripla A C minus C E, idest B E quadratum; & noncuplum cubi ex A C est factum ex A C in quadratum triplæ A C, idest B C quadratum; habebit tripla A C, idest B C ad triplam A C minus C E, idest E B maiorem rationem, quam factum ex A E in B E quadratum ad factum ex A C in B C quadratum; sed, vt B E quadratum ad B C quadratum, ita est E F ad C D; ergo B C ad B E habebit maiorem rationem, quam factum ex A E in E F ad factum ex A C in C D; sed vt B C ad B E, ita C I ad E L; ergo C I ad E L habebit maiorem rationem, quam factum ex A E in E F ad factum ex A C in C D; & factum sub extremis superabit factum sub medijs; ergo factum ex C I in C A in C D superabit factum ex E L in A E in E F, quod erat primo loco demonstrandum.

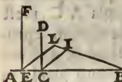
Ana-

Analysis secundæ partis.

SIT A E minor, quam A C, ideſt quam quarta pars totius A B, & ſit ipſi A E applicatum parallelepipedum ex A E in E F in E L deficiens plano plano ſimili plano plano, quo deficit parallelepipedum applicatum quartæ parti ipſius A B, ideſt ex A C in C I in C D.

Dico ſecundo parallelepipedum ex A C in C I in C D ſuperare parallelepipedum ex A E in E F in E L.

Quia parallelepipedum ex A C in C I in C D ſupponitur ſuperare parallelepipedum ex A E in E F in E L, habebit C I ad E L maiorem rationem, quam factum ex A E in E F ad factum ex A C in C D; ſed C I ad E L eſt, vti B C ad B E, ideſt, vti tripla A C ad triplam A C plus C E; ergo tripla A C ad triplam A C plus C E habet maiorem rationem, quam factum ex A E in E F, ideſt (quia A E eſt æqualis A C minus C E, & E F eſt ſimilis quadrato ex B E, ideſt ex tripla A C plus C E) quam factum ex A C minus C E in quadratum ex tripla A C plus C E, ad factum ex A C in C D, ideſt (quia C D eſt ſimilis quadrato ex B C, ſeu ex tripla A C) quam factum ex A C in quadratum triplæ A C; Quare tripla A C ad triplam A C plus C E habet maiorem rationem, quam noncuplum cubi ex A C minus triplo ſolido ex A C quadrato in C E minus quintuplo ſolido ex A C in C E quadratum minus cubo ex C E ad noncuplum cubi ex A C; & factum ſub



extremis ſuperabit factum ſub medijs. Quare viceſimum ſeptuplum quadrato quadratum ex A C ſuperabit viceſimum ſeptulum quadrato quadratum ex A C minus decem, & octo plano planis ex A C quadrato in C E quadratum minus octuplo plano plano ex A C in C E cubum, minus quadrato quadrato ex C E, quod patet. Quare ad Syntheſim.

Syntheſis ſecundæ partis.

QVia viceſimum ſeptuplum quadrato quadratum ex A C ſuperat viceſimum ſeptuplum quadrato quadratum ex A C minus decem, & octo plano planis ex A C quadrato in C E quadratum minus octuplo plano plano ex A C in C E cubum minus quadrato quadrato ex C E, & viceſimum ſeptuplum quadrato quadratum ex A C eſt id, quod fit ex tripla A C, ideſt C B in noncuplum cubi ex A C; & viceſimum ſeptuplum quadrato quadratum ex A C minus decem, & octo plano planis ex A C quadrato in C E quadratum minus octuplo plano plano ex A C in



C E cubum minus quadrato quadrato ex C E eſt id, quod fit ex tripla A C plus C E, ideſt B E in noncuplum cubum ex A C minus triplo ſolido ex A C quadrato in C E minus quintuplo ſolido ex A C in C E quadratum minus cubo ex C E, habebit C B ad B E maiorem rationem, quam noncuplum cubi ex A C minus triplo ſolido ex A C quadrato in C E minus quintuplo ſolido ex A C in C E quadratum minus cubo ex C E, ideſt, quam factum ex A C minus

nus C E, ideſt A E in quadratum ex tripla A C plus C E, ideſt quadratum ex B E, ad noncuplum cubi ex A C, ideſt ad factum ex A C in quadratum triplæ A C ideſt in B C quadratum; habebit igitur C B ad B E maiorem rationem, quam factum ex A E in quadratum ex B E ad factum ex A C in quadratum ex B C; ſed vt quadratum ex B E ad quadratum ex B C, ita eſt ex conſtructione E F ad C D; ergo factum ex A E in quadratum ex B E ad factum ex A C in quadratum ex B C erit, vt factum ex A E in E F ad factum ex A C in C D; ergo C B ad B E habebit maiorem rationem, quam factum ex A E in E F ad factum ex A C in C D; ſed vt C B ad B E, ita eſt C I ad E L; ergo C I ad E L habebit maiorem rationem, quam factum ex A E in E F ad factum ex A C in C D, & factum ſub extremis ſuperabit factum ſub medijs; factum igitur ex C I in A C in C D ſuperabit factum ex E L in A E in E F, quod erat demonſtrandum.

Cum igitur plano planum, quod applicatur quartæ parti datæ rectæ ſuperet, tam plano planum, quod applicatur parti maiori, quam ſit quarta pars, quam illud, quod applicatur parti minori cum ſimili defectu, erit omnium maximũ, quod propoſuimus demonſtrandum.

SCHOLIVM.

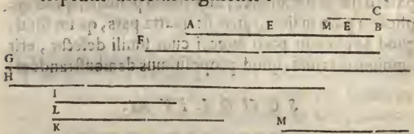
VT hæc propoſitio exibeatur per lineas homologas data rationali; Cum datarum altera ita ſecanda ſit, vt plano planum, quod ſit ex altero ſegmento in alterius ſegmenti cubum ſit omnium maximum, prius inuenienda erit ſimilis

 cubo

cubo alterius ſegmenti, quæ erit illa, ad quam rationalis habet triplicatam rationem eius, quam habet ad ſegmentum; Quare, ſimilis facto ex vno ſegmento in cubum alterius ſegmenti erit illa, ad quam vnum ex ſegmentis habebit illam rationem, quam habet rationalis ad ſimilem cubo alterius ſegmenti, ideſt, triplicatam eius, quam habet ad ſegmentum.

Eadem propoſitio propoſita, & demonſtrata per lineas homologas data rationali.

Datis duabus rectis lineis, quarum altera non ſecta ſe habeat loco rationalis; altera verò ſecta ſit vtcunque, & alterum ſegmentum ſectæ habeat ad aliam lineam rationem triplicatam eius, quam habet non ſecta ad alterum ſegmentum; Dico hanc lineam fore omnium maximam, quando ſegmentum ad quod refertur non ſecta æquabit tres quartas partes datæ rectæ, vel fuerit triplum alterius ſegmenti.



SIT data rationalis C, & altera A B, quæ prius ſecetur in M; ita vt A M ſit tripla ipſius B M, ſecundo vtcunque in E; ita vt B E ſit maior, aut minor, quam

quam B M, & fiat, vt C ad A M, ita A M ad F, & F ad G; & vt C ad G, ita B M ad H; habebit B M ad H rationem triplicatam eius, quam habet C ad A M: fiat iterum vt C ad A E, ita A E ad I, & I ad L; & vt C ad L, ita B E ad K; habebit B E ad K rationem triplicatam eius, quam habet C ad A E: Quia autem A M æquatur tribus ex quatuor partibus datæ A B, vel quod idem est, est tripla ipsius M B? Dico H superare K.

Fiat vt G ad H, ita L ad M; tum considerentur tres quantitates L, & G, & H, item aliæ tres L, & M, & K; ita, vt ratio L ad H sit composita ex ratione L ad G, & ex ratione G ad H; ratio verò L ad K sit composita ex ratione L ad M, & M ad K. Quia ab eadem C sunt duæ series continuè proportionalium C, & A M, & F, & G; item C, & A E, & I, & L habebit, per lemma secundum, L ad G triplicatam rationem eius, quam habet A E ad A M; sed, ex lemmate octauo, B M ad B E habet maiorem rationem, quam sit ratio triplicata A E ad A M; ergo B M ad B E habebit maiorem rationem, quam L ad G; sed quia per constructionem, vt C ad L, ita B E ad K, erit, vt C ad B E, ita L ad K; item quia per constructionem, vt C ad G, ita B M ad H, erit, vt C ad B M, ita G ad H; sed vt G ad H, ita facta est L ad M; erit igitur L ad M, vt C ad B M; sed quia vt C ad B E, ita L ad K, erit M ad K, vt B M ad B E; ergo M ad K habebit maiorem rationem, quam L ad G; sed quia, vt G ad H, ita L ad M, erit per rationem perturbatam, ratio L ad K maior, quam L ad H; ergo H superat K, quod erat probandum.

PRO-

PROPOSITIO V. ZETETICA.

Inuenire maximum plano planum, quod possit applicari dato plano cum defectu plano plani similis dato, & datum, cui debeat assimilari defectus sit quadrato quadratum.



IT datum B planum, cui sit applicandum plano planum deficiens quadrato quadrato, quod sit omnium maximum. Cum plano plani segmentum futurum sit quadratum, vnde componatur quadrato quadratum deficiens. Sit A cui applicetur B planum, ex quo si fiat quadratum erit reliquum B plani B planum minus A quadrato, quod ductum in A quadratum producet plano planum ex B plano in A quadratum minus A quadrato quadrato, quod erit plano planum applicatum cum defectu quadrato quadrati.

Iterum loco ipsius A sumatur A plus E, & E iuxta hanc methodum æquetur nihilo, & si ex A plus E fiat quadratum illud erit æquale quadrato ex A plus duplici plano ex A in E, plus quadrato ex E, quod si detrahatur à B plano erit reliquum B planum minus quadrato ex A minus duplici plano ex A in E minus quadrato ex E. Quod ductum in A quadratum plus duplici plano ex A in E plus E quadrato producet plano planum ex B plano in A quadratum plus duplici plano plano ex B plano in planum ex A in E plus plano plano ex B plano in E quadratum minus quadrato quadrato

drato ex A minus quadruplo plano plano ex A cubo in E minus sextuplo plano plano ex A quadrato in E quadratum minus quadruplo plano plano ex A in E cubum minus E quadrato quadrato. Vnde si dematur superius factum, idest plano planum ex B plano in A quadratum minus A quadrato quadrato, reliquum erit duplex plano planum ex B plano in planum ex A in E plus plano plano ex B plano in E quadratum minus quadruplo plano plano ex A cubo in E minus sextuplo plano plano ex A quadrato in E quadratum minus quadruplo plano plano ex A in E cubum minus E quadrato quadrato æquale nihilo; Quare facta Antithesi erit duplex plano planum ex B plano in planum ex A in E vna cum plano plano ex B plano in E quadratum æquale quadruplo plano plano ex A cubo in E plus sextuplo plano plano ex A quadrato in E quadratum plus quadruplo plano plano ex A in E cubum plus E quadrato quadrato; & si omnia applicentur ad E erit duplex factum ex B plano in A vna cum facto ex B plano in E æquale quadruplo cubo ex A plus sextuplo facto ex A quadrato in E plus quadruplo facto ex A in E quadratum plus E cubo; & reiectis omnibus ijs, quæ sunt sub E, nam æquantur nihilo, erit duplex factum ex B plano in A æquale quadruplici cubo ex A; & si omnia applicentur ad A, erit duplex B planum æquale quadruplo quadrato ex A; quare A quadratum occupat dimidium dati plani, & plano planum, quod applicatur dato plano deficiens quadrato quadrato est id, quod applicatur dimidio dati plani, quod idem est ac duabus ex quatuor partibus dati plani: Hinc

PO-

PORISMA.

Maximum plano planum, quod applicatur dato plano deficiens quadrato quadrato, est id, quod applicatur duabus partibus ex quatuor, in quas diuiditur planum; & quadrato quadratum, quod deficit occupat reliquas duas partes.

THEOREMA.

Omnium plano planorum ad idem datum planum applicatorum, & deficientium plano planis similibus, similiterq; positis, maximum est id, quod dimidio dati plani applicatur.

SIT planum datum G A, seu C I in A B, & ei æquale M A seu E L in A Q; & A B diuisa sit bifariam in C, erit factum ex A C in C I dimidium dati plani, cui sit simile factum ex A E in E L, & A E sit primo minor, quam A C, & vt quadratum ex A E ad quadratum ex A C, ita sit E F ad C D erit parallelepipedum ex C D in C I in C B plano planum applicatum dimidio plani dati C I in A B; parallelepipedum vero ex E F in E L in E Q erit plano planum applicatum parti maiori, quam sit dimidium dati plani, & vtrumque deficiet plano plano simili, similiterq; posito. Dico primo

mo parallelepipedum ex C D in C I in C B ſuperare parallelepipedum ex E F in E L, in E Q.

Analyſis primæ partis.

QVia parallelepipedum ex C D in C I in C B dicitur ſuperare parallelepipedum ex E F in E L E Q, habebit factum, ex C I in C B ad factum ex E L in E Q maiorem rationem, quam E F ad C D, ſed E F ad C D eſt, vti quadratum, ex A E ad quadratum ex A C; ergo factum ex C I in C B ad factum ex E L in E Q habebit maiorem rationem, quam quadratum ex A E ad quadratum ex A C; quia verò factum ex E L in E Q eſt æquale facto ex C I in A B minus facto ex A E in E L, habebit factum ex C I in C B ad factum ex C I in A B minus facto ex A E in E L maiorem rationem, quam qnadratum ex A E ad quadratum ex A C, & factum ſub extremis ſuperabit factum ſub medijs; factum igitur ex quadrato A C in C I in C B ſuperabit factum ex quadrato A E in C I in A B minus facto ex cubo A E in E L; ideſt, quia C B eſt æqualis A C, factum ex cubo A C in C I ſuperabit factum ex quadrato A E in duplicem A C in C I minus facto ex cubo A E in E L; Quia autem A E eſt æqualis A C minus C E, erit quadratum ex A E æquale quadrato ex A C minus duplici rectangulo ex A C in C E plus quadrato ex C E, & cubus ex A E erit æqualis cubo, ex A C minus triplo ſolido ex A C quadrato in C E plus triplici ſolido ex C E quadrato in A C minus cubo ex C E; Quare interpraetando factum ex quadrato A E in duplicem A C in C I minus facto

M ex

ex cubo A E in E L erit æquale facto ex duplici A C cubo in C I minus quadruplo facto ex A C quadrato in C E in C I plus duplici facto ex A C in C I in C E quadratum minus facto ex A C cubo in E L plus triplo facto ex A C quadrato in C E in E L minus triplo facto ex A C in C E quadratum in E L plus facto ex C E cubo in E L. Factum igitur ex cubo A C in C I superabit factum ex duplici cubo ex A C in C I minus quadruplo facto ex A C quadrato in C I in C E plus duplici facto ex A C in C I in C E quadratum minus facto ex A C cubo in E L plus triplo facto ex A C quadrato in C E in E L minus triplo facto ex A C in C E quadratum in E L plus facto ex C E cubo in E L; & facta

Antithesi erit quadruplum factum ex A C quadrato in C I in C E minus facto ex A C cubo in C I minus facto ex duplici A C in C I in C E quadratum maius triplici facto ex A C quadrato in C E in E L minus facto ex cubo A C in E L minus triplici facto ex A C in C E quadratum in E L plus facto ex cubo C E in E L. Quamobrem C I ad E L habebit maiorem rationem, quam triplex factum ex A C quadrato in C E minus cubo ex A C minus triplo facto ex A C in C E quadratum plus cubo ex C E ad quadruplum factum ex A C quadrato in C E minus cubo ex A C minus duplici facto ex A C in C E quadratum; sed, vti C I

ad

ad E L, ita eſt A C ad A E, ideſt A C ad A C minus C E; ergo A C ad A C minus C E habebit maiorem rationem, quam triplex factum ex A C quadrato in C E minus cubo ex A C minus triplo facto ex A C in C E quadratum plus cubo ex C E, ad quadruplum factum ex A C quadrato in C E minus cubo ex A C minus duplici facto ex A C in C E quadratum; & factum ſub extremis ſuperabit factum ſub medijs: Quadruplum igitur factum ex cubo A C in C E minus quadrato quadrato ex A C minus duplici facto ex A C quadrato in C E quadratum ſuperabit quadruplum factum ex A C cubo in C E minus ſextuplo facto ex A C quadrato in C E quadratū minus quadrato quadrato ex A C plus quadruplo facto ex A C in C E cubum minus quadrato quadrato ex C E; & additis vtriq; parti quadrato quadrato ex A C vna cum duplici facto ex A C quadrato in C E quadratum, erit quadruplum factum ex cubo A C in C E maius quadruplo facto ex cubo A C in C E minus quadruplo facto ex A C quadrato in C E quadratum plus quadruplo facto ex A C in C E cubum minus quadrato quadrato ex C E; & facta Antitheſi erit quadruplum factum ex A C quadrato in C E quadratum plus quadrato quadrato ex C E maius quadruplo facto ex A C in C E cubum; & ſi omnia applicentur ad C E quadratum, erit quadruplum quadratum ex A C plus quadrato ex C E maius quadruplo facto ex A C in C E, quod patet; nam cum A C ſuperet C E, quadruplum quadratum ex A C ſuperabit quadruplum factum ex A C in C E, & multo magis ſi quadruplo quadrato ex A C addatur quadratū ex C E. Quare ad Syntheſim.

Synthesis primæ partis.

QVia A C superat C E erit quadruplum quadratum ex A C, vna cum quadrato ex C E maius quadruplo facto ex A C in C E; & si vtraq; pars ducatur in C E quadratum, erit quadruplum factum ex A C quadrato in C E quadratum plus quadrato quadrato ex C E maius quadruplo facto ex A C in C E cubum. Vtrique parti addatur quadruplum factum ex cubo A C in C E, & fiat Antithesis, erit quadruplum factum ex cubo A C in C E maius quadruplo facto ex cubo A C in C E minus quadruplo facto ex A C quadrato in C E quadratum minus quadrato quadrato ex C E, plus quadruplo facto ex A C in C E cubum; & si vtrinque dematur quadrato quadratum, ex A C, vna cum duplici facto, ex A C quadrato in C E quadratum, erit quadruplum factum ex cubo A C in C E minus quadrato quadrato ex A C minus duplici facto ex A C quadrato in C E quadratum maius quadruplo facto ex cubo A C in C E minus quadrato quadrato ex A C minus sextuplo facto ex A C quadrato in C E quadratum minus quadrato quadrato ex C E plus quadruplo facto ex A C in C E cubum. Hoc est factum ex A C in quadruplum factum ex A C quadrato in C E minus cubo ex A C minus duplici facto ex

A C

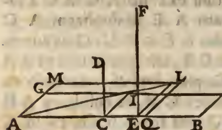
A C in C E quadratum superabit factum ex A C minus C E in triplex factum ex A C quadrato in C E minus cubo ex A C minus triplo facto ex A C in C E quadratum plus cubo ex C E; ergo A C ad A C minus C E, ideſt A E habebit maiorem rationem, quam triplex factum ex A C quadrato in C E minus cubo ex A C minus triplo facto ex A C in C E quadratum plus cubo ex C E ad quadruplum factum ex A C quadrato in C E minus cubo ex A C minus duplici facto ex A C in C E quadratum; ſed vt A C ad A E, ita eſt C I ad E L; habebit igitur C I ad E L maiorem rationem, quam triplex factum ex A C quadrato in C E minus cubo ex A C minus triplo facto ex A C in C E quadratum plus cubo ex C E ad quadruplum factum ex A C quadrato in C E minus cubo ex A C minus duplici facto ex A C in C E quadratum; Quare factum ſub extremis ſuperabit factum ſub medijs; quadruplum igitur factum ex A C quadrato in C E in C I minus facto ex A C cubo in C I minus facto ex duplici A C in C I in C E quadratum ſuperabit triplex factum ex A C quadrato in C E in E L minus facto ex cubo A C in E L minus triplici facto ex A C in C E quadratum in E L plus facto ex cubo C E in E L. Vtriq; parti addatur duplex factum ex A C cubo in C I, erit factum ex A C cubo in C I plus quadruplo facto ex A C quadrato in C E in C I minus duplici facto ex A C in C I in C E quadratum maius duplici facto ex A C cubo in C I plus triplo facto ex A C quadrato in C E in E L minus facto ex cubo A C in E L minus triplici facto ex A C in C E quadratum in E L plus facto ex

cubo

cubo C E in E L ; & facta Antithesi erit factum ex cubo A C in C I maius duplici facto ex cubo A C in C I minus quadruplo facto ex A C quadrato in C I in C E plus duplici facto ex A C in C I in C E quadratum minus facto ex A C cubo in E L plus triplici facto ex A C quadrato in C E in E L minus triplo facto ex A C in C E quadratum in E L plus facto ex C E cubo in E L, ideſt facto ex quadrato ipſius A C minus C E, ideſt A E, in duplicem A C in C I minus facto ex cubo ipſius A C minus C E, ideſt A E in E L. Igitur factum ex cubo A C in C I ſuperabit duplex factum ex quadrato A E in A C in C I minus facto ex A E cubo in E L ; ideſt, quia C B eſt æqualis A C factum ex A C quadrato in C I in C B ſuperabit factum ex quadrato A E in C I in A B, minus facto ex cubo A E in E L. Ergo factum ex C I in C B ad factum ex C I in A B minus facto ex A E in E L habebit maiorem rationem, quam quadratum ex A E ad quadratū ex A C, ideſt per conſtructionem, quam E F ad C D ; ſed factum ex C I in A B minus facto ex A E in E L eſt æquale facto ex E L in E Q. Ergo factum ex C I in C B ad factum ex E L in E Q habebit maiorem rationem, quam E F ad C D ; & factum ſub extremis ſuperabit factum ſub medijs. Factum igitur ex C I in C B in C D ſuperabit factum ex E L in E F in E Q, quod erat primo loco probandum, quando applicatio fit parti maiori dati plani, quam ſit ipſius pars dimidia ; Quare.

Sit ſecundo planum datum G A, ſeu C I in A B, & ei æquale M A, ſeu E L in A Q, & A B diuiſa ſit bi-

bifariam in C, erit factum ex A C in C I dimidium dati plani, cui sit simile factum ex A E in E L, & A E excedat A C, &, vt quadratum ex A E ad quadratum ex A C, ita sit E F ad C D, erit parallelepipedum ex C D in C I in C B plano planum applicatum dimidio plani dati C I in A B: parallelepipedum verò ex E F in E L in E Q erit plano planum applicatum parti minori, quam sit dimidium dati plani, & vtrumq; deficiet plano plano simili, similiterq; posito; Quamobrem

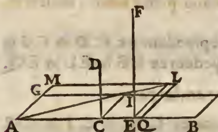


Dico secundo parallelepipedum ex C D in C I in C B superare parallelepipedum ex E F in E L in E Q.

Analysis secundæ partis.

QVia parallelepipedum ex C D in C I in C B dicitur superare parallelepipedum ex E F in E L in E Q, habebit factum ex C I in C B ad factum ex E L in E Q, maiorem rationem, quam E F ad C D, sed E F ad C D est, vti quadratum ex A E ad quadratum ex A C; ergo factum ex C I in C B ad factum ex E L in E Q habebit maiorem rationem, quam quadratum ex A E ad quadratum ex A C; quia verò factum ex E L in E Q est æquale facto ex C I in A B minus facto ex A E in E L, habebit factum ex C I in C B ad factum ex C I in A B minus facto ex A E in E L maiorem rationem, quam quadratum ex A E ad

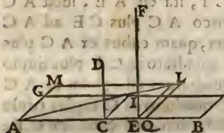
ad quadratum ex A C, & factum sub extremis superabit factum sub medijs. Factum igitur ex quadrato A C in C I in C B superabit factum ex quadrato A E in C I in A B minus facto ex cubo A E in E L, idest, quia C B est æqualis A C, factum ex cubo A C in C I superabit factum ex quadrato A E in duplicem A C in C I minus facto ex cubo A E in E L; Quia autem A E est æqualis A C plus C E, erit quadratum ex A E æquale quadrato ex A C plus duplici rectangulo ex A C in C E plus quadrato ex C E, & cubus ex A E erit æqualis cubo ex A C plus triplo solido ex A C quadrato in C E plus triplo solido ex C E quadrato in A C plus cubo ex C E. Quare interpretando factum ex quadrato A E in duplicem A C in C I minus facto ex cubo A E in E L erit æquale facto ex duplici A C cubo in C I plus quadruplo facto ex A C quadrato in C I in C E plus duplici facto ex A C in C I in C E quadratum minus facto ex cubo A C in E L minus triplo facto ex A C quadrato in C E in E L minus triplo facto ex A C in C E quadratum in E L minus facto ex C E cubo in E L; factum igitur ex cubo A C in C I superabit factum ex duplici cubo ex A C in C I plus quadruplo facto ex A C quadrato in C I in C E plus duplici facto ex A C in C I in C E quadratum minus facto ex cubo A C in E L minus triplo facto ex A C quadrato in C E in E L minus triplo



triplo facto ex A C in C E quadratum in E L minus facto ex C E cubo in E L; & per Antithesim factum ex cubo A C in E L plus triplo facto ex A C quadrato in C E in E L plus triplo facto ex A C in C E quadratum in E L plus facto ex cubo C E in E L superabit factum ex cubo A C in C I plus quadruplo facto ex A C quadrato in C I in C E plus duplo facto ex A C in C I in C E quadratum. Quamobrem E L ad C I habebit maiorem rationem, quam cubus ex A C plus quadruplo facto ex A C quadrato in C E plus duplici facto ex A C in C E quadratum ad cubum ex A C plus triplo facto ex A C quadrato in C E plus triplo facto ex A C in C E quadratum plus cubo ex C E; sed, vt E L ad C I, ita est A E, idest A C plus C E ad A C; idcircò A C plus C E ad A C habebit maiorem rationem, quam cubus ex A C plus quadruplo facto ex A C quadrato in C E plus duplo facto ex A C in C E quadratum ad cubum ex A C plus triplo facto ex A C quadrato in C E plus triplo facto ex A C in C E quadratum plus cubo ex C E; & factum sub extremis superabit factum sub medijs. Igitur quadrato quadratum ex A C plus quadruplo facto ex A C cubo in C E plus sextuplo facto ex A C quadrato in C E quadratum plus quadruplo facto ex C E cubo in A C plus quadrato quadrato ex C E superabit quadrato quadratum ex A C plus quadruplo facto ex A C cubo in C E plus duplici facto ex A C in C E cubum, quod cum per se pateat, ideò fit.

Synthesis secundæ partis.

QVia quadrato quadratum ex A C plus quadruplo facto ex A C cubo in C E plus sextuplo facto ex A C quadrato in C E quadratum plus quadruplo facto ex C E cubo in A C plus quadrato quadrato ex C E superat quadrato quadratum ex A C plus quadruplo facto ex A C cubo in C E plus duplici facto ex A C in C E cubum habebit factum ex A C plus C E ad A C maiorem rationem, quam cubus ex A C plus quadruplo facto ex A C quadrato in C E plus duplo facto ex A C in C E quadratum ad cubum ex A C plus triplo facto ex A C quadrato in C E plus triplo facto ex A C in C E quadratum plus cubo ex C E; sed vt A C plus C E ad A C, ita E L ad C I; ergo E L ad C I habebit maiorem rationem, quã cubus ex A C plus quadruplo facto ex A C quadrato in C E plus duplo facto ex A C in C E quadratum ad cubum ex A C plus triplo facto ex A C quadrato in C E plus triplo facto ex A C in C E quadratum plus cubo ex C E, & factum sub extremis superabit factum sub medijs; quare factum ex cubo A C in E L plus triplo facto ex A C quadrato in C E in E L plus triplo facto ex A C in C E quadratum in E L plus facto ex cubo ex C E in E L superabit factum ex cubo A C in C I plus quadruplo facto ex A C quadrato



in

in C E in C I plus duplo facto ex A C in C E quadratum in C I. Vtriq; termino addatur cubus ex A C in C I, & fiat Antithesis, erit factum ex cubo A C in C I maius duplici facto ex cubo A C in C I plus quadruplo facto ex A C quadrato in C E in C I plus duplo facto ex A C in C E quadratum in C I minus facto ex cubo A C in E L minus triplo facto ex A C quadrato in C E in E L minus triplo facto ex A C in C E quadratum in E L minus facto ex cubo C E in E L, idest per interpretationem id, quod fit ex quadrato ex A C plus C E, idest A E, in duplicem A C, idest A B in C I, minus eo, quod fit ex cubo eiusdem A C plus C E, idest A E in E L; Quare factum ex cubo A C in C I, idest, quia A C supponitur æqualis C B, factum ex quadrato A C in C I in C B superabit factum ex quadrato A E in A B in C I minus facto ex cubo A E in E L; Quare factum ex C I in C B ad factum ex A B in C I minus A E in E L habebit maiorem rationem, quam quadratum ex A E ad quadratum ex A C; sed, vt quadratum ex A E ad quadratum ex A C, ita E F ad C D, & factum ex A B in C I minus facto ex A E in E L est æquale facto ex E L in E Q; ergo factum ex C I in C B ad factum ex E L in E Q habet maiorem rationem, quam E F ad C D; quocirca factum ex C I in C B in C D superabit factum ex E F in E L in E Q, quod erat demonstrandum. Cum igitur tam plano-planum, quod applicatur dimidio dati plani superet, tam id, quod applicatur maiori parti, quam sit dimidium, quam id quod applicatur minori cum defectu simili, similiterq; posito patet esse omnium maximum, quod sumpsimus probandum.

SCHOLIVM.

VT hæc propoſitio exibeatur per lineas homologas data rationali in id recidet, vt reperiatur ſimilis dato plano, quæ ita ſecetur, vt quod ſit ſub ſegmentis ſit omnium maximum. Sed ad propoſitionem primam docuimus id eſſe, quando linea ſecatur bifariam; quocirca ne eadem fruſtra repetam eo remitto lectores, ibi enim demonſtratur. Poſita rationali, & linea, quæ ſecetur vtcunq; ſi fiat, vt rationalis ad alterum ſegmentum, ita alterum ſegmentum ad aliam, hanc fore omnium maximam, quando ſegmenta erunt æqualia; nam linea, quæ ſecatur in hac propoſitione eſt, ea, quæ facta eſt ſimilis dato plano, & alterum ipſius ſegmentum referet partem dati plani in quadratum effecti, & vltima inuenta referet factum plano planum ex partibus plani in ſe ductis.

PROPOSITIO VI. ZETETICA.

Inuenire maximum plano planum, quod poſſit applicari dato ſolido cum defectu plano plani ſimilis dato, & datum, cui debeat aſſimilari defectus ſit quadrato quadratum,



IT datum B ſolidum, cui ſit applicandum plano planum deficiens quadrato quadrato, quod ſit omnium maximum; Cum ſolidi ſegmentum, quod effingi debet in quadrato quadratum deficiens neceſſe ſit, vt ſit cubus. Sit igitur A, cui applicetur B ſolidum, ex quo ſi fiat cubus, erit reliquum B ſolidum minus cubo ex A, quod ductum in

in A producet plano planum ex B solido in A minus quadrato quadrato ex A, quod erit plano planum applicatum cum defectu A quadrato quadrati.

Iterum loco ipsius A sumatur A plus E, & E iuxta hanc methodum æquetur nihilo, erit plano planum applicatum deficiens quadrato quadrato plano planum ex B solido in A plus plano plano ex B solido in E minus quadrato quadrato ex A minus quadruplo plano plano ex A cubo in E minus sextuplo plano plano ex A quadrato in E quadratum minus quadruplo plano plano ex A in E cubũ minus quadrato quadrato ex E; Vnde si dematur superius factum, erit differentia plano planum ex B solido in E minus quadruplo plano plano ex A cubo in E minus sextuplo plano plano ex A quadrato in E quadratum minus quadruplo plano plano ex A in E cubum minus quadrato quadrato ex E, quæ æquabitur nihilo; & facta Antithesi, & omnibus applicatis ad E, erit B solidum æquale quadruplo A cubo plus sextuplo solido ex A quadrato in E plus quadruplo solido ex A in E quadratum plus cubo ex E; & reiectis ijs, quæ sub E; nam æquantur nihilo, erit B solidum æquale quadruplo A cubo, & quarta pars B solidi æquabitur cubo ex A, ex quo effingi debet quadrato quadratum; & plano planum deficiens quadrato quadrato applicabitur tribus ex quatuor partibus dati solidi. Hinc

PORISMA.

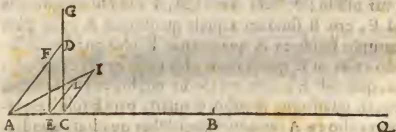
Maximum plano planum, quod applicatur dato solido deficiens quadrato quadrato est id, quod applicatur tribus ex quatuor partibus dati solidi, & quadrato quadratum, quod deficit occupat reliquam quartam partem.

THEO-

THEOREMA.

Omnium plano planorum ad idem ſolidum applicatorum, & deficientium plano planis ſimilibus, ſimiliterq; poſitis maximum eſt id, quod applicatur tribus partibus ex quatuor, in quas diuiſum ſupponitur ſolidum.

SIT datum ſolidum ex C I in A B in C D, cui fiat æquale ſolidum ex E L in E F in A Q; & A C ſit ſub tripla ipſius C B, erit ſolidum ex C I in C D in C B æquale tribus ex quatuor partibus dati ſolidi, & ſolidum ex E L in E F in E Q erit maius, quam ſint tres ex quatuor partibus dati ſolidi; & ſint ſolida ex A C in C I in C D, & ex A E in E L in E F inter ſe ſimilia; fiat autem, vt quadratum ex



A E ad quadratum ex A C, ita E F ad C G, erunt parallelepipeda ex A E in E L in E F, & ex A C in C I in C G plano plana ſimilia, ſimiliterq; poſita, & parallelepipeda ex C I in C B in C G, & ex E L in E F in E Q erunt plano plana eidem ſolido applicata deficientia plano planis ſimilibus, ſimiliterq; poſitis.

Dico primo parallelepipedum ex C I in C B in C G,

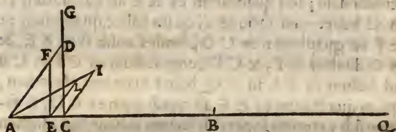
quod

quod est applicatum tribus ex quatuor partibus dati solidi superare parallelepipedum ex E L in E F in E Q, quod est applicatum parti maiori, quam sint tres ex quatuor partibus dati solidi, cum ipsorum defectus sint plano plana similia, similiterq; posita.

Analysis primæ partis.

QVia factum ex C I in C B in C G dicitur superare factum ex E L in E F in E Q habebit factum ex C I in C B ad factum ex E L in E Q maiorem rationem, quam E F ad C G, hoc est, quam quadratum ex A E ad quadratum ex A C per constructionem; sed quadratum ex A E ad quadratum ex A C habet eam rationem, quam habet quadratum ex E F ad quadratum ex C D, similes enim sunt A E, & A C duabus E F, & C D; ergo factum ex C I in C B ad factum ex E L in E Q habet maiorem rationem, quam quadratum ex E F ad quadratum ex C D, & factum sub extremis superabit factum sub medijs; factum igitur ex C I in C B in C D quadratum superabit factum ex E L in E Q in E F quadratum; sed quia factum ex C I in C D in A B factum est æquale facto ex E L in E F in A Q, erit factum ex E L in E Q in E F æquale facto ex C I in C D in A B minus facto ex A E in E L in E F, & factum ex E L in E Q in E F quadratum erit æquale facto ex C I in C D in A B in E F minus facto ex A E in E L in E F quadratum. Quare factum ex C I in C B in C D quadratum superabit factum ex C I in C D in A B in E F minus facto ex A E in E L in E F quadratum. Quia verò C B per

per constructionem est æqualis triplici A C, & A B quadrupl.ci, erit factum ex C I in triplam A C in C D quadratum maius facto ex C I in quadruplam A C in C D in E F minus facto ex A E in E L in E F quadratum; & factum ex C I in triplam A C in C D ad factum ex C I in quadruplam A C in C D minus facto ex A E in E L in E F habebit maiorem rationem, quam E F ad C D, seù, quam A E ad A C, nam eadem est ratio per constructionem; Quare factum sub extremis superabit factum sub medijs. Igitur factum ex C I in triplum quadratum ex A C in C D superabit factum ex C I in quadruplam A C in C D in A E



minus facto ex A E quadrato in E L in E F; & per Antithesim factum ex A E quadrato in E L in E F superabit factum ex C I in quadruplam A C in C D in A E minus facto ex C I in triplum quadratum ex A C in C D; & ideò factum ex A E quadrato in E L ad factum ex C I in quadruplam A C in A E minus facto ex C I in triplum quadratum ex A C habebit maiorem rationem, quam C D ad E F, seù per constructionem, quam A C ad A E; & ideo factum ex A E cubo in E L superat factum ex C I in quadruplum A C quadratum in A E minus facto ex C I in triplum cubum ex A C;

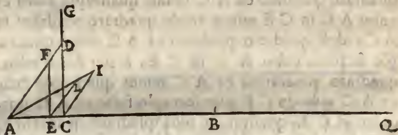
&

& cubus ex A E ad factum ex quadruplo quadrato A C in A E minus triplo cubo ex A C habebit maiorem rationem, quam C I ad E L, seù quam A C ad A E; & ideò quadrato quadratum ex A E superabit factum ex quadruplo cubo ex A C in A E minus triplo quadrato quadrato ex A C; quia autem A E est æqualis A C minus C E, fiat interpretatio, & erit quadrato quadratum ex A C minus C E, idest quadrato quadratum ex A C minus quadruplo facto ex A C cubo in C E, plus sextuplo facto ex A C quadrato in C E quadratum minus quadruplo facto ex A C in C E cubum plus quadrato quadrato ex C E maius facto ex quadruplo cubo ex A C in A E, idest interpretando A E in A C minus C E facto ex quadruplo quadrato quadrato ex A C minus quadruplo facto ex cubo A C in C E minus triplo quadrato quadrato ex A C, idest quadrato quadrato ex A C minus quadruplo facto ex cubo A C in C E; & per Antithesim quadrato quadratum ex A C minus quadruplo facto ex A C cubo in C E plus sextuplo facto ex A C quadrato in C E quadratum plus quadrato quadrato ex C E superabit quadrato quadratum ex A C minus quadruplo facto ex cubo A C in C E plus quadruplo facto ex A C in C E cubum; & reiectis communibus scilicet quadrato quadrato ex A C minus quadruplo facto ex cubo A C in C E, erit sextuplum factum ex A C quadrato in C E quadratum vna cum quadrato quadrato ex C E maius quadruplo facto ex A C in C E cubum; & si omnia applicentur ad quadratum ex C E; erit sextuplum quadratum ex A C vna cum

quadrato ex C E maius quadruplo facto ex A C in C E, quod patet, nam A C supponitur superare C E.

Synthesis primæ partis.

QVia A C superat C E erit sextuplum quadratum ex A C vna cum quadrato ex C E maius quadruplo facto ex A C in C E; si omnia ducantur in C E quadratum, erit sextuplum factum ex A C quadrato in C E quadratum vna cum quadrato quadrato ex C E maius quadruplo facto ex A C in C E cubum; si vtrique parti addatur quadrato quadratum ex A C minus quadruplo facto ex cubo A C in C E; erit quadrato quadratum ex A C minus quadruplo facto ex cubo A C in C E vna cum sextuplo facto ex A C



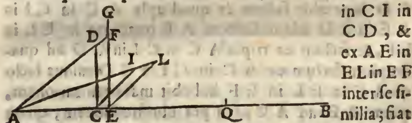
quadrato in C E quadratum vna cum quadrato quadrato ex C E maius quadrato quadrato ex A C minus quadruplo facto ex cubo A C in C E plus quadruplo facto ex A C in C E cubum; & per Antithesim erit quadrato quadratum ex A C minus quadruplo facto ex cubo A C in C E plus sextuplo facto ex A C quadrato in C E quadratum minus quadruplo facto ex A C in C E cubum plus quadrato quadrato ex C E, idest per interpretationem quadrato quadratum ex A E,

(nam

(nam A E æquatur A C minus C E) maius quadrato quadrato ex A C minus quadruplo facto ex cubo A C in C E, ideſt per interpætationem quadruplo facto ex cubo A C in A E minus triplo quadrato quadrato ex A C. Quare cubus ex A E ad factum ex quadruplo quadrato ex A C in A E minus triplo cubo ex A C habebit maiorem rationem, quam A C ad A E, ideſt, quam C I ad E L; ideò factum ex cubo A E in E L ſuperabit factum ex quadruplo quadrato ex A C in A E in C I minus triplo facto ex cubo A C in C I, & factum ex A E quadrato in E L ad factum ex quadrupla A C in A E in C I minus facto ex triplo A C quadrato in C I habebit maiorem rationem, quam A C ad A E, ideſt, quam C D ad E F; & factum ex A E quadrato in E L in E F ſuperabit factum ex quadrupla A C in C I in A E in C D minus triplo facto ex quadrato A C in C I in C D; & per Antithesim triplum factum ex quadrato A C in C I in C D ſuperabit factum ex quadrupla A C in C I in A E in C D minus facto ex A E quadrato in E L in E F, & factum ex tripla A C in C I in C D ad quadruplum factum ex A C in C I in C D minus facto ex A E in E L in E F habebit maiorem rationem, quàm A E ad A C, ſeù per conſtructionem, quam E F ad C D; ergo factum ex tripla A C, ideſt C B in C I in C D quadratum ſuperabit factum ex quadrupla A C, ideſt ex A B in C D in C I in E F minus facto ex A E in E L in E F quadratum; ſed A B in C D in C I minus facto ex A E in E L in E F eſt æquale facto ex E F in E L in E Q; ergo factum ex

C B in C I in C D quadratum superabit factum ex E F quadrato in E L in E Q; & factum ex C B in C I ad factum ex E L in E Q habebit maiorem rationem, quam E F quadratum ad C D quadratum, idest quam E F ad C G; (nam per constructionem, vt quadratum ex A E ad quadratum ex A C, ita E F ad C G, & E F quadratum ad C D quadratum) Quamobrem factum ex C B in C I in C G superabit factum ex E L in E Q in E F, quod sumpsimus demonstrandum; Quando applicatio fit parti maiori dati solidi, quam sint tres partes ipsius solidi diuisi in quatuor partes. Quare

Sit secundo datum solidum ex C I in A B in C D, cui fiat æquale solidum ex E L in E F in A Q, & A C sit sub tripla ipsius C B, erit solidum ex C I in C D in C B æquale tribus ex quatuor partibus dati solidi, & solidum ex E L in E F in E Q erit minus, quam sint tres ex quatuor partibus dati solidi, & sint solida ex A C in C I in C D, & ex A E in E L in E F inter se similia; fiat



autem, vt quadratum ex A C ad quadratum ex A E, ita C D ad E G; erunt parallelepipeda ex A E in E L in E G, & ex A C in C I in C D plano plana similia, similiterq; posita, & parallelepipeda ex C I in C B in C D, & ex E L in E G in E Q erunt plano plana eidem solido applicata deficientia plano planis

simi-

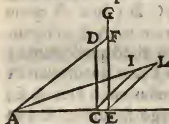
similibus, similiterque positis.

Dico secundo parallelepipedum ex C I in C B in C D, quod est applicatum tribus ex quatuor partibus dati solidi superare parallelepipedum ex E L in E G in E Q, quod est applicatum parti minori, quam sint tres ex quatuor partibus dati solidi, cum ipsorum defectus sint plano plana similia, similiterq; posita.

Analysis secundæ partis.

QVia factum ex C I in C B in C D dicitur superare factum ex E L in E Q in E G, habebit factum ex C I in C B ad factum ex E L in E Q maiorem rationem, quam E G ad C D; hoc est quam quadratum ex A E ad quadratum ex A C per constructionem; sed quadratum ex A E ad quadratum ex A C habet eam rationem, quam habet quadratum ex E F ad quadratum ex C D; similes enim sunt A E, & A C duabus E F, & C D; ergo factum ex C I in C B ad factum ex E L in E Q habet maiorem rationem, quam quadratum ex E F ad quadratum ex C D, & factum sub extremis superabit factum sub medijs; factum igitur ex C I in C B in C D quadratum superabit factum ex E L in E Q in E F quadratum: sed quia factum ex C I in C D in A B factum est æquale facto ex E L in E F in A Q, erit factum ex E L in E Q in E F æquale facto ex C I in C D in A B minus facto ex A E in E L in E F, & factum ex E L in E Q in E F quadratum erit æquale facto ex C I in C D in A B in E F minus facto ex A E in E L in E F quadratum. Quare factum ex C I in C B in C D quadratum

dratum superabit factum ex C I in C D in A B in E F minus facto ex A E in E L in E F quadratum. Quia vero C B per constructionem est æqualis triplici A C, & A B quadruplici; erit factum ex C I in triplam A C in C D quadratum maius facto ex C I in quadruplam A C in C D in E F minus facto ex A E in E L in E F quadratum; & factum ex C I in triplam A C in C D ad factum ex C I in quadruplam A C in C D minus facto ex A E in E L in E F habebit maiorem rationem quam E F ad C D, seù quam A E ad A C; nam eadem est ratio, per constructionem; Quare factum sub extremis superabit factum sub medijs; igitur factum



ex C I in triplum quadratũ ex A C in C D superabit factum ex C I in quadruplam A C in C D in A E minus facto ex A E quadrato in E L in E F; & per Antithesim factum ex A E quadrato in E L in E F superabit factum ex C I in quadruplam A C in C D in A E minus facto ex C I in triplum quadratum ex A C in C D; & ideò factum ex A E quadrato in E L ad factum ex C I in quadruplam A C in A E minus facto ex C I in triplum quadratum ex A C habebit maiorem rationem, quam C D ad E F, seu per constructionem, quam A C ad A E; & ideò factum ex A E cubo in E L superat factum ex C I in quadruplum A C quadratum in A E minus facto ex C I in triplum

cubum

cubum ex A C ; & cubus ex A E ad factum ex quadruplo quadrato ex A C in A E minus triplo cubo ex A C habebit maiorem rationem, quam C I ad E L, seu quam A C ad A E ; & ideò quadrato quadratum ex A E superabit factum ex quadruplo cubo ex A C in A E minus triplo quadrato quadrato ex A C. Quia autem A E est æqualis A C plus C E, fiat interpretatio, & erit quadrato quadratum ex A C plus C E, idest quadrato quadratum ex A C plus quadruplo facto ex cubo A C in C E plus sextuplo facto ex A C quadrato in C E quadratum plus quadruplo facto ex A C in C E cubum plus quadrato quadrato ex C E maius facto ex quadruplo cubo ex A C in A E minus triplo quadrato quadrato ex A C, idest interpretando A E in A C plus C E facto ex quadruplo quadrato quadrato ex A C plus quadruplo facto ex cubo A C in C E minus triplo quadrato quadrato ex A C, idest quadrato quadrato ex A C plus quadruplo facto ex cubo A C in C E, quod patet. Hinc

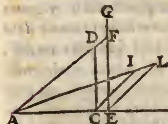
Synthesis secundæ partis.

QVia quadrato quadratum ex A C plus quadruplo facto ex cubo A C in C E plus sextuplo facto ex A C quadrato in C E quadratum plus quadruplo facto ex A C in C E cubum plus quadrato quadrato ex C E superat quadrato quadratum ex A C plus quadruplo facto ex cubo A C in C E, idest (interpretando A C plus C E in A E) quadrato quadratum ex A E superat quadruplum factum ex cubo A C in A E minus triplo quadrato quadrato ex A C, habebit

bebit cubus ex A E ad factum ex quadruplo quadrato A C in A E minus triplo cubo ex A C maiorem rationem, quam A C ad A E, ideſt, quam C I ad E L; Ergo factum ex cubo A E in E L ſuperabit quadruplum factum ex quadrato A C in A E in C I minus facto ex triplo cubo ex A C in C I; & factum ex quadrato A E in E L ad factum ex quadrupla A C in A E in C I minus facto ex triplo quadrato A C in C I habebit maiorem rationem, quam A C ad A E, ſeu per conſtructionem C D ad E F. Quamobrem factum ex A E quadrato in E L in E F ſuperabit factum ex quadrupla A C in A E in C I in C D minus facto ex triplo quadrato ex A C in C I in C D; & per Antitheſim factum ex triplo quadrato A C in C I in C D ſuperabit factum ex quadrupla A C in A E in C I in C D minus facto ex A E quadrato in E L in E F; & factum ex tripla A C in C I in C D ad factum ex quadrupla A C in C I in C D minus facto ex A E in E L in E F habebit maiorem rationem, quam A E ad A C, ſeu E F ad C D; factum igitur ex tripla A C in C I in C D quadratum ſuperat factum ex quadrupla A C in C I in C D in E F minus facto ex A E in E L in E F quadratum; & quia tripla A C, per conſtructionem eſt æqualis C B, & quadrupla A C ipſi A B, erit factum ex C B in C I in C D quadratum maius facto, ex A B in C I in C D in E F minus facto ex A E in E L in E F quadratum. Quia autem factum ex A B in C I in C D eſt æquale facto ex A Q in E L in E F, erit factum ex A B in C I in C D minus facto ex A E in E L in E F æquale facto

ex

ex E L in E F in E Q; ideò erit factum ex C B in C I in C D quadratum maius facto ex E L in E Q in E F quadratum, & factum ex C B in C I ad factum ex E L in E Q habebit maiorem rationem, quam E F quadratum ad C D quadratum; sed, vt E F quadratum ad C D quadratum, ita quadratum ex A E ad quadratum ex A C ob similitudinem linearum; & vt quadratum ex A E ad quadratum ex A C, ita est E G ad C D, per constructioné, habebit factum ex C B in C I ad factum ex E L in E Q maiorem rationem, quam E G ad C D; & ideò factum ex C B in C I in C D superabit factum ex E L in E G in E Q, quod erat probandum; Cum igitur plano planum, quod applicatur tribus ex quatuor partibus dati solidi superet plano planum, quod applicatur parti, tam maiori, quam minori, ea, quæ æquet tres ex quatuor partibus dati solidi, cum defectu simili, erit maximum omnium, quæ applicari possint dato solido, quod sumpsimus demonstrandum.



SCHOLIVM.

QVia tunc applicatur plano planum dato solido deficiens quadrato quadrato, quando datum solidum, ita secatur, vt si ex altero ipsius segmento efficiatur cubus, & reliquum solidi applicetur quadrato huius effecti cubi, tum exibea-

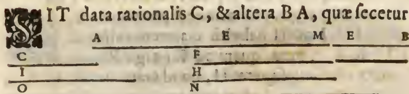
tur quædam altitudo, quæ ad altitudinem cubi habeat eam rationem, quam habet latus cubi ad rationalem datam, & cum hac altitudine, manente eadem basi cubi, fiat parallelepipedum, hoc per ea, quæ in Isagoge docuimus, erit quadrato quadratum, cuius quadrato quadrati altitudine seruata, si terminetur reliquum applicati solidi, exurgens parallelepipedum erit plano planum applicatum deficiens quadrato quadrato: Hoc igitur plano planum applicatum deficiens quadrato quadrato erit parallelepipedum illud, ad quod habebit reliquum solidi detracto cubo eam rationem, quam habet rationalis data se gerens vice vnitatis ad latus cubi, idest subtriplicatam eius, quam habet ad cubum; Quamobrem, vt hæc omnia reducantur ad lineas homologas posita rationali, quærenda erit prius linea homologa dato solido, quæ erit quarta proportionalis posita rationali prima, & ea, quæ potest datum solidum secunda; tum etiam inuenienda est similis cubo dati segmenti, quæ erit quarta proportionalis, posita rationali prima, & ea, quæ potest datum segmentum secunda, quæ si subtrahatur à simili dato solido, cum sit ipsa minor: nam assimilatur parti, reliquum erit simile reliquo dati solidi, cui si constituatur consequens in ea ratione, quam habet rationalis ad similem lateri resecti cubi, hæc consequens erit similis plano plano applicato dato solido, cum defectu quadrato quadrati: & hanc demonstrabimus esse omnium maximam, quando similis cubo erit tertia pars similis reliquo segmento; hoc est, quando, si tota linea similis dato solido secetur in quatuor partes, quarta pars assimiletur cubo, & fiat, vt rationalis ad latus cubi, ita similis reliquo solidi ad aliam, seu, quod idem est tres ex quatuor partibus similis dato solido habeant ad aliam rationem subtriplicatam eius, quam habet rationalis ad reliquam quartam partem.

partem. Fateor autem in hac propositione, si construenda essent omnia, quæ adduximus recedendum esse ab Euclideis postulatis; nam inter duas datas essent inueniendæ duæ mediæ proportionales; attamen cum ad demonstrandum sufficiat factum supponere, ab æquis Lectoribus hoc mihi concedi postulans me transferam ad propositionem.

Eadem propositio demonstrata, & proposita per lineas homologas data rationali.

Datis duabus rectis lineis, quarum altera se habens loco rationalis sit non secta; altera verò secta vtcunq;, & alterum segmentum sectæ habeat ad aliam rationem subtriplicatam eius, quam habet rationalis ad alterum segmentum. Dico hanc fore omnium maximam, quando segmentum illud fuerit alterius triplum.

SIT data rationalis C, & altera B A, quæ secetur



primo in M, ita, vt M A sit tripla ipsius B M; secundo, vtcunq; in E; ita, vt B E sit maior, aut minor quam B M; & I sit prima duarum medio loco proportionalium inter C, & B M, & O similiter inter C, & B E; & fiat vt C ad I, ita M A ad F, &, vt C

 ad

ad O, ita E A ad H. Dico F superare H.

Cum ab eadem C supponantur duæ series quatuor continuè proportionalium, quarum vna desinit in B M, & altera in B E, & primæ seriei secunda est I, & alterius seriei secunda est O; habebit B M ad B E rationem triplicatam eius, quam habet I ad O, per lemma secundum; si igitur inter B M, & B E intelligantur duæ mediæ proportionales, quarum prima sit G, habebit B M ad G eam rationem, quam habet I ad O; & erit ratio B M ad G subtriplicata rationis B M ad B E; Quare per lemma decimum habebit B M ad G maiorem rationem, quam A E ad A M; tum sic.

Fiat vt O ad H, ita I ad N; & considerentur tres quantitates I, O, H, & aliæ tres I, N, F; Quia, vt C ad M A, ita I ad F, &, vt O ad H, ita C ad E A, erit ratio I ad F minus ratione O ad H, æqualis rationi E A ad A M; sed vti O ad H, ita facta est I ad N; ergo ratio N ad F erit æqualis rationi E A ad M A; ergo I ad O habebit maiorem rationem quam N ad F; sed vt O ad H, ita I ad N; ergo, per rationem perturbatam, I ad H habebit maiorem rationem, quam ad F; ergo F superat H, quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO VII. ZETETICA.

Inuenire maximum plano solidum, quod fiat sub segmento datæ rectæ lineæ, & quadrato quadrato alterius segmenti, quod idem est, ac inuenire maximum plano solidum, quod applicari possit datæ lineæ deficiens quadrato cubo.

SCHOLIVM.

HIC aduertendum est quadrato cubum, iuxta Methodum Diophanteam, quam ego sequor, esse eam magnitudinem, quæ iuxta alteram methodum dicitur primum Surdesolidum, aut Relatum; quod volui monuisse, ne, sit inanibus quæstionibus nominis locus; licet satis, superq; fuisset me quadrato cubum non quadrati cubum dixisse, cum hac dicendi formula exprimatur id, quod producitur ex quadrato in cubum, non autem productum ex quadrato cubicè ducto.

SIT data recta B, cuius alterum segmentum sit A, erit alterum B minus A, & quod fit ex B, minus A in quadrato quadratum ex A, erit B, in A quadrato quadratum minus A quadrato cubo, plano solidum quæsitum.

Sit iterum alterum ipsius segmentum A plus E erit alterum B minus A minus E, fiat ex A plus E quadrato quadratum, erit quadrato quadratum ex A plus quadruplo plano plano ex A cubo in E plus sextuplo plano plano ex E quadrato in A quadratum plus quadruplo

druplo plano plano ex A in E cubum plus quadrato quadrato ex E, quod ductum in B minus A minus E, producet plano solidum ex B in A quadrato quadratum plus quadruplo plano solido ex B in A cubum in E plus sextuplo plano solido ex B in E quadratum in A quadratum plus quadruplo plano solido ex B in A in E cubum plus plano solido ex B in E quadrato quadratum minus quadrato cubo ex A minus quintuplo plano solido ex A quadrato quadrato in E minus decuplo plano solido ex E quadrato in A cubum minus decuplo plano solido ex A quadrato in E cubum minus quintuplo plano solido ex A in E quadrato quadratum minus E quadrato cubo: Vnde si dematur superius factum B in A quadrato quadratum minus A quadrato cubo, erit residuum quadruplum plano solidum ex B in A cubum in E plus sextuplo plano solido ex B in E quadratum in A quadratum plus quadruplo plano solido ex B in A in E cubum plus plano solido ex B in E quadrato quadratum minus quintuplo plano solido ex A quadrato quadrato in E minus decuplo plano solido ex E quadrato in A cubum minus decuplo plano solido ex A quadrato in E cubum minus quintuplo plano solido ex A in E quadrato quadratum minus E quadrato cubo. Omnia applicentur ad E, & seruatis tantum ijs, quæ ab E liberentur, cum reliqua supponantur æqualia nihilo, & fiat Antithesis, erit quadruplum factum ex B in A cubum æquale quintuplo A quadrato quadrato; & si omnia applicentur ad A cubum, erit quadruplum B æquale quintuplo A, & quatuor ex quinque partibus ipsius B erunt æquales

ipsi

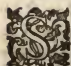
ipsi A; cum autem A sit segmentum, vnde effingi debeat quadrato cubus defecturus, erit maximum plano solidum, quod applicatur ipsi B deficiens quadrato cubo, id quod applicatur quintæ parti ipsius B. Hinc

PORISMA.

Maximum plano solidum, quod applicatur datæ lineæ deficiens quadrato cubo est id, quod applicatur quintæ parti datæ lineæ, & quadrato cubus, qui deficit occupat reliquas quatuor ex quinque partibus datæ lineæ.

THEOREMA.

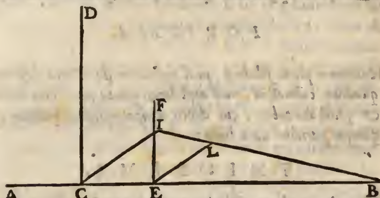
Omnium plano solidorum ad eandem lineam applicatorum, & deficientium plano solidis similibus, similiterq; positis maximum est id, quod quintæ parti datæ lineæ applicatur.



IT data recta A B, cuius quinta pars sit A C, & A E primo superet A C, & parallelogrammum ex B C in C I sit simile parallelogrammo ex B E in E L. Fiat autem, vt cubus ex B C ad cubum ex B E, ita C D ad E F; erunt per definitionem secundam facta ex B C in C I in C D, & ex B E in E F in E L duo plano solida similia, cum sint parallelepipeda super similibus basibus constituta, quorum altitudines sunt in triplicata ratione laterum homologorum similium basium; Quocirca facta parallelepipeda ex A C in C I in C D, & ex A E in E L in E F

erunt

erunt plano solida eidem lineæ A B applicata deficientia plano solidis similibus, similiterq; positis, quorum factum ex A C in C I in C D applicatum est quintæ parti datæ lineæ; alterum verò scilicet factum ex A E



in E F in E L applicatum est parti maiori, quam sit quinta pars datæ lineæ. Quare dico primo factum ex A C in C I in C D superare factum ex A E in E F in E L.

Analysis primæ partis.

QVia parallelepipedum ex A C in C I in C D supponitur superare parallelepipedum ex A E in E L in E F, habebit factum ex A C in C I ad factum ex A E in E L maiorem rationem, quam E F ad C D, seù per constructionem, quam cubus ex B E, seù ex quadrupla A C minus C E ad cubum ex B C, seù quadrupla A C; Quare factum ex A C in C I ad factum ex A E in E L habebit maiorem rationem, quam sexaginta quatuor cubi ex A C minus quadraginta, & octo solidis ex A C quadrato in C E plus duodecim solidis ex C E quadrato in A C minus cubo ex C E
ad

ad ſexaginta quatuor cubos ex A C ; & factum ſub extremis ſuperabit factum ſub medijs ; ergo factum ex ſexaginta quatuor quadrato quadratis ex A C in C I ſuperabit factum ex ſexaginta quatuor cubis ex A C in A E in E L minus facto ex quadraginta octo quadratis ex A C in C E in A E in E L plus facto ex duodecim quadratis ex C E in A C in A E in E L minus facto ex cubo C E in A E in E L ; Ideò ſexaginta quatuor quadrato quadrata ex A C ad factum ex ſexaginta quatuor cubis ex A C in A E minus facto ex quadraginta , & octo quadratis ex A C in C E in A E plus facto ex duodecim quadratis ex C E in A C in A E minus facto ex C E cubo in A E habebit maiorem rationem, quam E L ad C I, ideſt B E ad B C, ideſt quadrupla A C minus C E ad quadruplam A C, & factum ſub extremis ſuperabit factum ſub medijs ; ergo ducenti quinquaginta ſex quadrato cubi ex A C ſuperabunt factum, ex ducentis quinquaginta ſex quadrato quadratis ex A C in A E minus facto ex ducentis quinquaginta ſex cubis ex A C in C E in A E plus facto ex nonaginta ſex quadratis ex A C in C E quadratum in A E minus facto ex ſexdecim cubis ex C E in A C in A E plus quadrato quadrato ex C E in A E ; ideſt quia A E eſt æqualis A C plus C E, facta interpretatione , ducenti quinquaginta ſex quadrato cubi ex A C ſuperabunt ducentos quinquaginta ſex quadrato cubos ex A C minus facto ex centum ſexaginta cubis ex A C in C E quadratum plus facto ex octoginta cubis ex C E in A C quadratum minus facto ex quindecim quadrato quadratis ex C E in A C

plus quadrato cubo ex C E; & si fiat Antithesis, & reiciantur communia, factum ex centum sexaginta cubis ex A C in C E quadratum plus facto ex quindecim quadrato quadratis ex C E in A C superabit factum ex octoginta cubis ex C E in A C quadratum plus quadrato cubo ex C E; & si omnia applicentur ad quadratum ex C E, centum sexaginta cubi ex A C vna cum facto ex quindecim quadratis ex C E in A C superabunt factum ex octoginta quadratis ex A C in C E plus cubo ex C E, quod patebit ex sequenti lemmate.

LEMMA.

Datis duabus lineis; ita tamen, vt altera deficiat à quadrupla alterius. Dico centum sexaginta cubos vnius vna cum facto ex eadem in quindecim quadrata alterius superare factum ex octoginta quadratis eiusdem in alteram plus alterius cubo.

SInt duæ lineæ C, & E, & quadrupla C superet E. C

Dico E

centum sexaginta cubos ex C, vna cum facto ex C in quindecim quadrata ex E superare factum ex octoginta quadratis ex C in E, plus cubo ex E.

Plures casus habet hæc propositio; aut enim C superat E; aut est ipsi æqualis; aut E superat C, & dupla C superat E; aut dupla C est æqualis E; aut E superat duplam C, & tripla C superat E; aut tripla C

est

eſt æqualis E; aut E ſuperat triplam C, & quatuor C ſuperant E, in omnibus hiſce caſibus examinanda erit propoſitio.

Sit primo C maior, quam E, factum ex octoginta quadratis ex C in E, vna cum cubo ex E deficiet ab octoginta, & vno cubo ex C; ergo multo magis à centum ſexaginta, vna cum facto ex C in quindecim quadrata ex E.

Sit ſecundo C æqualis E, factũ ex octoginta quadratis ex C in E, vna cum cubo ex E æquabitur octoginta, & vni cubo ex C; ergo deficiet à centum ſexaginta cubis ex C, vna cum facto ex quindecim quadratis ex E in C.

Sit tertio E maior quam C, ſed duplex C ſuperet E, factum ex octoginta quadratis ex C in E, vna cum cubo ex E deficiet à centum ſexaginta cubis ex C, vna cum duplici facto ex C in E quadratum; ergo multo magis à centum ſexaginta cubis ex C, vna cum facto ex quindecim quadratis ex E in C.

Sit quarto E æqualis duplici C, erit quadratum ex E æquale quadruplo quadrato ex C, & factum ex quindecim quadratis ex E in C æquabitur ſexaginta cubis ex C; ergo centum ſexaginta cubi ex C, vna cum facto ex quindecim quadratis ex E in C æquabunt ducentos viginti cubos ex C; factum verò ex octoginta quadratis ex C in E vna cum E cubo, æquabitur centum ſexaginta, & octo cubis ex C; cum autem ducenti viginti cubi ex C ſuperent centum ſexaginta, & octo, patet propoſitio.

Sit quinto E maior duplici C; ſed triplex C ſuperet E; ponatur E æqualis duplici C plus A, & C ſu-

peret A, centum ſexaginta cubi ex C plus facto ex quindecim quadratis ex E in C æquabunt ducentos viginti cubos ex C plus facto ex ſexaginta quadratis ex C in A plus facto ex quindecim quadratis ex A in C; factum verò ex octoginta quadratis ex C in E vna cum cubo ex E æquabit centum ſexaginta, & octo cubos ex C plus facto ex nonaginta duobus quadratis ex C in A plus ſextuplo facto ex C in A quadratum plus A cubo. Dico ducentos viginti cubos ex C plus facto ex ſexaginta quadratis ex C in A plus facto ex quindecim quadratis ex A in C ſuperare centum ſexaginta, & octo cubos ex C plus facto ex nonaginta duobus quadratis ex C in A plus ſextuplo facto ex C in A quadratum plus A cubo; nam ſubductis communibus quinquaginta duo cubi ex C plus noncuplo facto ex A quadrato in C ſuperabunt factum ex triginta duobus quadratis ex C in A plus A cubo, quod patet, quia C ſuperat A.

Sit ſexto E æqualis triplici C, centum ſexaginta cubi ex C vna cum facto ex quindecim quadratis ex E in C æquabunt ducentos nonaginta quinque cubos ex C; & factum ex octoginta quadratis ex C in E, vna cum cubo ex E æquabit ducentos ſexaginta ſeptem cubos ex C, & cum ducenti nonaginta quinque ſuperent ducentos ſexaginta ſeptem, patet concluſio.

Sit ſeptimo E maior tripla C, ſed minor quadrupla, ideſt ſit æqualis triplici C plus A, & C ſuperet A; centum ſexaginta cubi ex C, vna cum facto ex quindecim quadratis ex E in C æquabunt ducentos nonaginta quinque cubos ex C plus facto ex nonaginta qua-

dratis

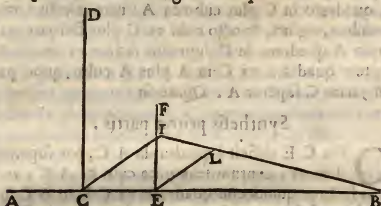
dratis ex C in A plus facto ex quindecim quadratis ex A in C; factum verò ex octoginta quadratis ex C in E plus E cubo æquatur ducentis sexaginta septem cubis ex C plus facto ex centum septem quadratis ex C in A plus facto ex noncuplo A quadrato in C plus A cubo; & ducenti nonaginta quinque cubi ex C plus facto ex nonaginta quadratis ex C in A plus facto ex quindecim quadratis ex A in C superant ducentos sexaginta septem cubos ex C plus facto ex centum septem quadratis ex C in A plus facto ex noncuplo A quadrato in C plus cubo ex A; nam reiectis communibus, viginti, & octo cubi ex C plus facto ex sextuplo A quadrato in C superant factum ex decem & septem quadratis ex C in A plus A cubo, quod patet, nam C superat A. Quare sit

Synthesis primæ partis.

QVia C E deficit à quadrupla A C, per superius lemma, centum sexaginta cubi ex A C, vna cum facto ex quindecim quadratis ex C E in A C superabunt factum ex octoginta quadratis ex A C in C E, plus cubo ex C E; & si omnia ducantur in quadratum ex C E, factum ex centum sexaginta cubis ex A C in C E quadratum vna cum facto ex quindecim quadrato quadratis ex C E in A C superabit factum ex octoginta quadratis ex A C in C E cubum plus quadrato cubo ex C E; si vtriq; parti addantur ducenti quinquaginta sex quadrato cubi ex A C, & fiat Antithesis, ducenti quinquaginta sex quadrato cubi ex A C superabunt ducentos quinquaginta sex quadrato cubos

ex

ex A C minus facto ex centum sexaginta cubis ex A C in C E quadratum plus facto ex octoginta quadratis ex A C in C E cubum minus facto ex quindecim quadrato quadratis ex C E in A C plus quadrato cubo ex C E, & si fiat interpretatio A C plus C E in A E, cui æquatur; ducenti quinquaginta sex quadrato cubi ex A C superabunt factum ex ducentis quinquaginta sex quadrato quadratis ex A C in A E minus facto ex ducentis quinquaginta sex cubis ex A C in C E in A E plus facto ex nonaginta sex quadratis ex A C in



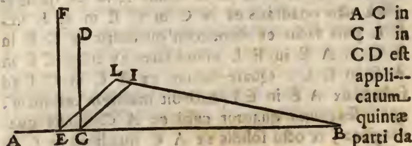
C E quadratum in A E minus facto ex sexdecim cubis ex C E in A C in A E plus quadrato quadrato ex C E in A E; ideò sexaginta quatuor quadrato quadrata ex A C ad factum ex sexaginta quatuor cubis ex A C in A E minus facto ex quadraginta, & octo quadratis ex A C in C E in A E plus facto ex duodecim quadratis ex C E in A C in A E minus facto ex C E cubo in A E habebit maiorem rationem, quam quadrupla A C minus C E ad quadruplam A C, idest, quam B E ad B C, idest, quam E L ad C I, & factum

sub

sub extremis superabit factum sub medijs ; ergo factum ex sexaginta quatuor quadrato quadratis ex A C in C I superabit factum ex sexaginta quatuor cubis ex A C in A E in E L minus facto ex quadraginta octo quadratis ex A C in C E in A E in E L plus facto ex duodecim quadratis ex C E in A C in A E in E L minus facto ex cubo C E in A E in E L . Quare factum ex A C in C I ad factum ex A E in E L habebit maiorem rationem, quam sexaginta quatuor cubi ex A C minus quadraginta , & octo solidis ex A C quadrato in C E plus duodecim solidis ex C E quadrato in A C minus cubo ex C E ad sexaginta quatuor cubos ex A C , idest , quam cubus ex quadrupla A C minus C E, idest B E ad cubum ex quadrupla A C , idest B C; sed vt cubus ex B E ad cubum ex B C, ita E F ad C D per constructionem ; ergo factum ex A C in C I ad factum ex A E in E L habebit maiorem rationem, quam E F ad C D , & factum sub extremis superabit factum sub medijs : factum igitur ex A C in C I in C D superabit factum ex A E in E L in E F , quod erat primo loco demonstrandum ; Quando applicatio fit parti maiori , quam sit quinta pars datæ lineæ .

Sit secundo A C maior , quam A E , & planum ex B E in E L sit simile plano ex B C in C I ; C D verò ad E F sit , vt cubus ex B C ad cubum ex B E ; erunt parallelepipeda ex B C in C I in C D , & ex B E in E L in E F plano solida similia ; Quare parallelepipeda ex A E in E L in

in E F, & ex A C in C D in C I erunt plano solida applicata datæ lineæ deficientia plano solidis similibus, similiterq; positis; Quia verò plano solidum ex A C in C I in C D est appli-catum quintæ parti datæ lineæ, & plano solidum ex A E in E L in E F est applicatum parti minori, quam sit quinta pars datæ lineæ.



Dico secundo factum ex A C in C I in C D superare factum ex A E in E L in E F.

Analysis secundæ partis.

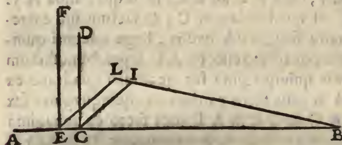
Quia factum ex A C in C I in C D supponitur superare factum ex A E in E L in E F habebit factum ex A C in C I ad factum ex A E in E L maiorem rationem, quam E F ad C D, seu per constructionem, quam cubus ex B E, seù ex quadrupla A C plus C E ad cubum ex B C, seù quadrupla A C. Quare factum ex A C in C I ad factum ex A E in E L habebit maiorem rationem, quam sexaginta quatuor cubi ex A C plus quadraginta, & octo solidis ex A C quadrato in C E plus duodecim solidis ex C E quadrato in A C plus cubo ex C E ad sexaginta quatuor cubos ex A C; & factum sub extremis superabit factum

sub

ſub medijs ; Ergo factum ex ſexaginta quatuor quadrato quadratis ex A C in C I ſuperabit factum ex ſexaginta quatuor cubis ex A C in A E in E L plus facto ex quadraginta, & octo quadratis ex A C in C E in A E in E L plus facto ex duodecim quadratis ex C E in A C in A E in E L plus facto ex cubo C E in A E in E L ; Ideò ſexaginta quatuor quadrato quadrata ex A C ad factum ex ſexaginta quatuor cubis ex A C in A E plus facto ex quadraginta, & octo quadratis ex A C in C E in A E plus facto ex duodecim quadratis ex C E in A C in A E plus facto ex cubo C E in A E habebit maiorem rationem, quam E L ad C I, ideſt B E ad B C, ideſt quadrupla A C plus C E ad quadruplam A C ; & factum ſub extremis ſuperabit factum ſub medijs . Ergo ducenti quinquaginta ſex quadrato cubi ex A C ſuperabunt factum ex ducentis quinquaginta ſex quadrato quadratis ex A C in A E plus facto ex ducentis quinquaginta ſex cubis ex A C in C E in A E plus facto ex nonaginta ſex quadratis ex A C in quadratum ex C E in A E plus facto ex ſexdecim cubis ex C E in A C in A E plus facto ex quadrato quadrato ex C E in A E ; ideſt, quia A E eſt æqualis A C minus C E, facta interpretatione, ducenti quinquaginta ſex quadrato cubi ex A C ſuperabunt ducentos quinquaginta ſex quadrato cubos ex A C minus facto ex centum ſexaginta cubis ex A C in C E quadratum minus facto ex octoginta cubis ex C E in A C quadratum minus facto ex quindecim quadrato quadratis ex C E in A C minus quadrato cubo ex C E, quod patet : Quare ſit

Synthesis secundæ partis.

QVia A E est æqualis A C minus C E erit factum ex ducentis quinquaginta sex quadrato quadratis ex A C in A E plus facto ex ducentis quinquaginta sex cubis ex A C in C E in A E plus facto ex nonaginta sex quadratis ex A C in quadratum ex C E in A E plus facto ex sexdecim cubis ex C E in A C in A E plus facto ex quadrato quadrato ex C E in A E æquale ducentis quinquaginta sex quadrato cubis ex A C minus facto ex centum sexaginta cubis ex A C in C E quadratum minus facto ex octoginta cubis ex C E in A C quadratum minus facto ex quindecim quadrato quadratis ex C E in A C minus quadrato cubo ex C E. Quare ducenti quinquaginta sex quadrato cubi ex A C superabunt factum ex ducentis quinquaginta sex quadrato quadratis ex A C in A E plus facto ex ducentis quinquaginta sex cubis ex A C in C E in A E plus facto ex nonaginta sex quadratis ex A C in quadratum ex C E in A E plus facto ex sexdecim cubis ex C E in A C in A E plus facto ex quadrato quadrato ex C E in A E; & resoluendo habebunt sexaginta quatuor quadrato quadrata ex A C ad factũ



ex

ex ſexaginta quatuor cubis ex A C in A E plus facto ex quadraginta, & octo quadratis ex A C in C E in A E plus facto ex duodecim quadratis ex C E in A C in A E plus facto ex cubo C E in A E maiorem rationem, quam quadrupla A C plus C E ad quadruplam A C; ideſt, quam B E ad B C, ideſt, quam E L ad C I, & factum ſub extremis ſuperabit factum ſub medijs. Ergo factum ex ſexaginta quatuor quadrato quadratis ex A C in C I ſuperabit factum ex ſexaginta quatuor cubis ex A C in A E in E L plus facto ex quadraginta, & octo quadratis ex A C in C E in A E in E L plus facto ex duodecim quadratis ex C E in A C in A E in E L plus facto ex cubo C E in A E in E L. Quare factum ex A C in C I ad factum ex A E in E L habebit maiorem rationem, quam ſexaginta quatuor cubi ex A C plus quadraginta, & octo ſolidis ex A C quadrato in C E plus duodecim ſolidis ex C E quadrato in A C plus cubo ex C E ad ſexaginta quatuor cubos ex A C; ideſt, per interpretationem, quam cubus ex quadrupla A C plus C E, ideſt ex B E ad cubum ex quadrupla A C, ideſt B C; ſed, vt cubus ex B E ad cubum ex B C, ita eſt, per conſtructionem, E F ad C D; Ergo factum ex A C in C I ad factum ex A E in E L habebit maiorem rationem, quam E F ad C D, & conſequenter factum ex A C in C I in C D ſuperabit factum ex A E in E L in E F; ergo plano ſolidum, quod applicatur quintæ parti datæ lineæ ſuperat plano ſolidum, quod applicatur parti minori, quam ſit quinta pars, quod erat ſecundo loco demonſtrandum: Cum autem

demonſtrauerimus etiam ſuperare id, quod applicatur parti maiori patet eſſe omnium maximum eorum, quæ applicari poſſint cum defectu ſimili, ſimiliterq; poſito, quod ſumpſimus demonſtrandum.

SCHOLIVM.

SI ponatur linea rationalis, & huius ratio ad aliam lineam datam continuetur in quatuor alijs continuè proportionalibus vltrà rationalem, erit vltima ſimilis quadrato quadrato datæ lineæ; & ſi hæc ducatur in aliam lineam quamcunque datam producetur ſimile plano ſolido; Cum autem ſimilis huic producto ſit proportionalis illa, ad quam hæc vltimo loco data habeat eam rationem, quam habet rationalis ad vltimam continuè proportionalium, hoc eſt quadruplicatam eius, quam habet ad primo datam lineam, vt apparet ex ijs, quæ in Iſagoge docuimus; Hinc fit, vt eadem ſuperior propoſitio per lineas homologas data rationali aptè demonſtretur ſequenti propoſitione.

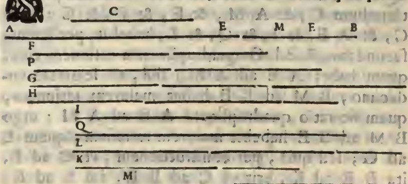
Eadem propoſitio propoſita, & demonſtrata per lineas homologas data rationali.

Datis duabus rectis lineis, quarum altera non ſecta ſe habeat loco rationalis; altera verò ſecta ſit, vtcunque, & alterum ipſius ſegmentum habeat ad aliam lineam rationem quadruplicatam eius, quam habet non ſecta ad alterum ſegmentum. Dico hanc fore omnium maximam, quando ſegmen-

tum,

tum, ad quod refertur non secta erit æquale quatuor ex quinque partibus datæ rectæ sectæ, vel fuerit quadruplum alterius segmenti.

SIT data rationalis C, & altera A B, quæ prius



secetur in M, ita, vt A M sit quadrupla ipsius B M; secundo vtcunque in E; ita vt B E sit maior, aut minor, quam B M; & fiat, vt C ad A M, ita A M ad F, & F ad P, & P ad G, habebit C ad G quadruplicatam rationem eius, quam habet ad A M; fiat iterum, vt C ad A E, ita A E ad I, & I ad Q, & Q ad L, habebit C ad L quadruplicatam rationem eius, quam habet ad A E; tum fiat, vt C ad G, ita B M ad H, &, vt C ad L, ita B E ad K habebit B M ad H rationem quadruplicatam eius, quam habet C ad A M, & B E ad K rationem quadruplicatam eius, quam habet C ad A E; sed quia A M æquatur quatuor ex quinque partibus datæ A B, vel quod idem est, est quadrupla ipsius M B. Dico H superare K.

Fiat

Fiat vt G ad H, ita L ad M; tum considerentur tres quantitates L, & G, & H, item aliæ tres L, & M, & K; ita, vt ratio L ad H sit composita ex ratione L ad G, & ex ratione G ad H; ratio verò L ad K sit composita ex ratione L ad M, & M ad K. Quia ab eadem C sunt duæ series continuè proportionalium C, & A M, & F, & P, & G; item C, & A E, & I, & Q, & L, habebit, per lemma secundum, L ad G quadruplicatam rationem eius, quam habet A E ad A M; sed, ex lemmate vndecimo, B M ad B E habet maiorem rationem, quam sit ratio quadruplicata A E ad A M; ergo B M ad B E habebit maiorem rationem, quam L ad G; sed quia, per constructionem, vt C ad L, ita B E ad K, erit vt C ad B E, ita L ad K; item quia, per constructionem, vt C ad G; ita B M ad H erit, vt C ad B M; ita G ad H; sed, vt G ad H, ita facta est L ad M; erit igitur L ad M, vt C ad B M; sed quia vt C ad B E, ita L ad K erit M ad K, vt B M ad B E; sed B M ad B E habet maiorem rationem, quam L ad G; ergo M ad K habebit maiorem rationem, quam L ad G: sed quia vt G ad H, ita L ad M, erit, per rationem perturbatam, ratio L ad K maior, quam L ad H; ergo H superat K, quod erat probandum.

PRO-

PROPOSITIO VIII. ZETETICA.

Inuenire maximum plano solidum, quod possit applicari dato plano deficiens quadrato cubo.

SIT datum B planum, & oporteat facere, quod imperatum est; ita secandum erit B planum, vt si ex altero ipsius segmento fiat quadratum, & ex latere huius effecti quadrati fiat cubus, quod fit ex reliquo plani in hunc effectum cubum sit omnium maximum. Sit segmentum A quadratum, erit reliquum plani B planum minus A quadrato, quod ductum in A cubum producet plano solidum applicatum, idest B planum in A cubum, minus A quadrato cubo.

Sit secundo segmentum quadratum ex A plus E, & E æquetur nihilo; idest A quadratum plus duplici rectangulo ex A in E plus E quadrato; erit reliquum plani B planum, minus A quadrato minus duplici rectangulo ex A in E minus E quadrato, quod ductum in cubum ex A plus E, idest in cubum ex A plus triplici solido ex A quadrato in E plus triplici solido ex E quadrato in A plus E cubo, erit factum B planum in A cubum minus A quadrato cubo minus quintuplo A quadrato quadrato in E minus decuplo à cubo in E quadratum plus triplo B plano in A quadratum in E plus triplo B plano in E quadratum in A plus B plano in E cubum minus decuplo A quadrato in E cubum minus quintuplo E quadrato quadrato in A minus E quadrato cubo; Vnde si dematur superius factum, idest

B pla-

B planum in A cubum minus A quadrato cubo, erit residuum triplum B planum in A quadratum in E plus triplo B plano in E quadratum in A plus B plano in E cubum minus quintuplo facto ex A quadrato quadrato in E minus decuplo facto ex A cubo in E quadratum minus decuplo facto ex A quadrato in E cubum minus quintuplo facto ex E quadrato quadrato in A minus E quadrato cubo; & si omnia applicentur ad E, & reseruatis ijs tantum, quæ ab E liberantur, & fiat Antithesis, erit triplum B planum in A quadratum æquale quintuplo quadrato quadrato ex A; & si vtraq; pars applicetur ad A quadratum, erit triplum B planum æquale quintuplo quadrato ex A, & tres partes ex quinque partibus B plani æquales erunt A quadrato; cum autem ex A quadrato efformari debeat quadrato cubus, qui sit defecturus, erit plano solidum, quod applicatur dato plano deficiens quadrato cubo id, quod applicatur reliquis duabus ex quinque partibus dati plani. Hinc Porisma

PORISMA.

Maximum plano solidum, quod applicatur dato plano deficiens quadrato cubo est id, quod applicatur duabus ex quinque partibus dati plani, & quadrato cubus, qui deficit occupat reliquas tres partes.

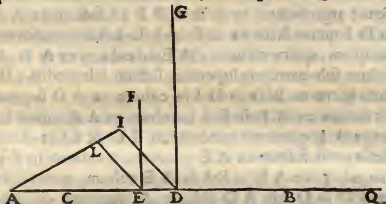
THEOREMA.

Omnium plano solidorum ad idem planum applicatorum, & deficientium plano solidis similibus, similiterq; positis maximum

est

est id, quod duabus ex quinque partibus dati plani applicatur.

SIT datum planum A B in D I, quinta autem pars ipsius A B sit A C, & A D sit ipsius A C tripla, erit B D æqualis duabus ex quinque partibus totius A B, & factum ex B D in D I erit æquale duabus ex quinque partibus dati plani. Fiat plano A B in D I æquale planum ex A Q in E L, & factum ex E A in E L sit simile facto ex A D in D I, & E F ad D G habeat triplicatam rationem eius, quam habet A E ad A D, erunt parallelepipeda ex



A D in D I in D G, & ex A E in E L in E F plano solida similia, similiterq; posita, & parallelepipeda ex B D in D G in D I, & ex Q E in E F in E L erunt plano solida eidem plano applicata deficientia plano solidis similibus, similiterq; positis; Plano solidum verò ex B D in D G in D I erit applicatum duabus ex quinque partibus dati plani, & plano solidum ex Q E in E F in E L erit applicatum parti maiori, quam

ſint duæ ex quinque partibus dati plani. Quare

Dico primo plano ſolidum ex B D in D G in D I ſuperare plano ſolidum ex Q E in E F in E L.

Analyſis primæ partis.

QVia plano ſolidum ex B D in D G in D I ſupponitur ſuperare plano ſolidum ex Q E in E F in E L, habebit factum ex B D in D I ad factum ex Q E in E L maiorem rationem, quam E F ad D G; ſed factum ex Q E in E L eſt æquale facto ex A B in D I minus facto ex A E in E L, & E F ad D G eſt, vt cubus ex A E ad cubum ex A D, per conſtructionem; ergo factum ex B D in D I ad factum ex A B in D I minus facto ex A E in E L habebit maiorem rationem, quam cubus ex A E ad cubum ex A D, & factum ſub extremis ſuperabit factum ſub mediis; factum igitur ex B D in D I in cubum ex A D ſuperabit factum ex A B in D I in cubum ex A E minus facto ex A E quadrato quadrato in E L; & ſi fiat Antitheſis, erit factum ex A E quadrato quadrato in E L maius facto ex A B in D I in A E cubum, minus facto ex B D in D I in A D cubum, & quadrato quadratum ex A E ad factum ex A B in A E cubum minus facto ex B D in A D cubum habebit maiorem rationem, quam D I ad E L, ideſt A D ad A E, & factum ſub extremis ſuperabit factum ſub medijs; ergo quadrato cubus ex A E ſuperabit factum ex A B in A D in A E cubum minus facto ex B D in A D quadrato quadratum. Quia autem A E eſt æqualis triplæ A C minus D E, & A B eſt æqualis quintuplæ A C, &

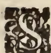
AD

A D triplæ, si fiat interpretatio, ducenti quadraginta tres quadrato cubi ex A C minus facto ex quadringentis quinque quadrato quadratis ex A C in D E plus facto ex ducentis septuaginta cubis ex A C in quadratum D E minus facto ex nonaginta quadratis ex A C in cubum D E plus facto ex quindecim A C in quadrato quadratum ex D E minus quadrato cubo ex D E superabunt ducentos quadraginta tres quadrato cubos ex A C minus facto ex quadringentis quinque quadrato quadratis ex A C in D E plus facto ex centum triginta quinque cubis ex A C in D E quadratum minus facto ex quindecim quadratis ex A C in D E cubum; & si demantur communia, & fiat Antithesis; factum ex centum triginta quinque cubis ex A C in quadratum D E, vna cum facto ex quindecim A C in D E quadrato quadratum superabit factum ex septuaginta quinque quadratis ex A C in D E cubum plus quadrato cubo ex D E; & si omnia applicentur ad D E quadratum centum triginta quinque cubi ex A C, vna cum facto ex quindecim quadratis ex D E in A C superabunt factum ex septuaginta quinque quadratis ex A C in D E vna cum cubo ex D E, quod patet ex sequenti lemmate.

L E M M A.

Datis duabus lineis; ita, vt altera deficiat à tripla alterius. Dico centum triginta quinque cubos ex prima, vna cum facto ex quindecim quadratis secundæ in primam superare factum ex

ſeptuaginta quinque quadratis primæ in ſecundam, vna cum cubo ex ſecunda.


Int datæ duæ rectæ C, & E, C
& E deficiat à tripla C. E
Dico centum triginta quinque cubos ex C, vna cum facto ex quindecim quadratis ex E in C ſuperare factum ex ſeptuaginta quinque quadratis ex C in E, vna cum cubo ex E.

Plures caſus habet hęc propoſitio; aut E deficit à C, aut eſt æqualis, aut ſuperat C, ſed deficit ab ipſius dupla, aut eſt æqualis duplæ, aut ſuperat duplam, & deficit à tripla.

Sit primo E minor quam C, factum ex ſeptuaginta quinque quadratis ex C in E, vna cum cubo ex E deficiet à ſeptuaginta ſex cubis ex C; ergo multo magis à centum triginta quinque cubis ex C, vna cum facto ex quindecim quadratis ex E in C.

Sit ſecundo E æqualis C, erit factum ex ſeptuaginta quinque quadratis ex C in E, vna cum cubo ex E æquale ſeptuaginta ſex cubis ex C, ergo deficiet à centum triginta quinque cubis ex C, vna cum facto ex quindecim quadratis ex E in C.

Sit tertio E maior C, ſed minor dupla C, & ſupponatur æqualis C plus A, & C ſit maior A; erit aggregatum ex centum triginta quinque cubis ex C, vna cum facto ex quindecim quadratis ex E in C æquale aggregato ex centum quinquaginta cubis ex C, vna cum facto ex triginta quadratis ex C in A plus facto ex quindecim A quadratis in C; factum verò ex ſeptuaginta quinque quadratis ex C in E, vna cum cubo

ex

ex E erit æquale ſeptuaginta ſex cubis ex C, vna cum facto ex ſeptuaginta, & octo quadratis ex C in A plus triplo facto ex A quadrato in C plus A cubo; ſi igitur aggregatum ex centum quinquaginta cubis ex C, vna cum facto ex triginta quadratis ex C in A plus facto ex quindecim A quadratis in C comparetur aggregato ex ſeptuaginta ſex cubis ex C, vna cum facto ex ſeptuaginta octo quadratis ex C in A plus triplo facto ex A quadrato in C plus A cubo, & demantur vtrinq; communia, reſiduum primæ partis erit aggregatum ex ſeptuaginta quatuor cubis ex C, vna cum facto ex duodecim quadratis ex A in C, quod patet ſuperare reſiduum ſecundæ partis, ideſt aggregatum ex quadraginta, & octo quadratis ex C in A plus cubo ex A: Cum enim A deficiat à C hoc aggregatum deficiet à quadraginta nouem cubis ex C, ergo multò magis à ſeptuaginta quatuor cubis ex C, vna cum facto ex duodecim quadratis ex A in C.

Sit quarto E æqualis duplici C, erit aggregatum ex centum triginta quinque cubis ex C, vna cum facto ex quindecim quadratis ex E in C æquale centum nonaginta quinque cubis ex C, & aggregatum ex ſeptuaginta quadratis ex C in E, vna cum E cubo erit æquale centum quadraginta, & octo cubis ex C. Quare patet primum ſuperare poſtremum.

Sit vltimo E maior duplici C, ſed deficiat ab ipſius tripla; quare ſupponatur æqualis duplici C plus A, & C ſuperet A; erit aggregatum ex centum triginta quinque cubis ex C, vna cum facto ex quindecim quadratis ex E in C æquale aggregato ex centum nonaginta quinque

cubis

cubis ex C, vna cum facto ex ſexaginta quadratis ex C in A plus facto ex quindecim A quadratis in C; & aggregatum ex ſeptuaginta quinque quadratis ex C in E vna cum cubo ex E erit æquale aggregato ex centum quinquaginta,& octo cubis ex C plus facto ex octoginta ſeptem quadratis ex C in A plus facto ex ſex quadratis ex A in C plus cubo ex A. Primum igitur ſuperare poſtremum patet; nam ſi vtrinq; demantur cõmunia, reſiduũ primi erit aggregatũ ex triginta ſeptem cubis ex C, vna cũ facto ex nouẽ quadratis ex A in C; reſiduũ verò ſecundi erit aggregatum ex viginti ſeptem quadratis ex C in A, vna cum cubo ex A, quod deficit a viginti,& octo cubis ex C; nam C ſuperat A, ergo multo magis deficiet à triginta ſeptem cubis ex C, vna cum facto ex nouem quadratis ex A in C; vnde patet propoſitio. Sit igitur

Syntheſis primæ partis.

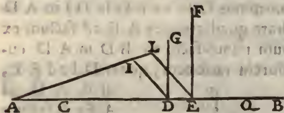
QVia D E deficit à tripla A C erit, per lemma ſuperius, aggregatum ex centum triginta quinque cubis ex A C, vna cum facto ex quindecim quadratis

dratis ex D E in A C maius facto ex septuaginta quinque quadratis ex A C in D.E, vna cum cubo ex D E; & si omnia ducantur in D E quadratum, erit factum ex centum triginta quinque cubis ex A C in quadratum D E, vna cum facto ex quindecim A C in D E quadrato quadratum maius facto ex septuaginta quinque quadratis ex A C in D E cubum plus quadrato cubo ex D E; & per Antithesim aggregatum ex centum triginta quinque cubis ex A C in quadratum D E, vna cum facto ex quindecim A C in D E quadrato quadratum minus quadrato cubo ex D E superabit factum ex septuaginta quinque quadratis ex A C in D E cubum; & si vtrique parti addantur ducenti quadraginta tres quadrato cubi ex A C minus facto ex quadringentis quinque quadrato quadratis ex A C in D E plus facto ex centum triginta quinque cubis ex A C in D E quadratum minus facto ex nonaginta quadratis ex A C in D E cubum; aggregatum ex ducentis quinquaginta tribus quadrato cubis ex A C minus facto ex quadringentis quinque quadrato quadratis ex A C in D E plus facto ex ducentis septuaginta cubis ex A C in quadratum D E minus facto ex nonaginta quadratis ex A C in cubum D E plus facto ex quindecim A C in quadrato quadratum ex D E minus quadrato cubo ex D E superabit aggregatum ex ducentis quadraginta tribus quadrato cubis ex A C minus facto ex quadringentis quinque quadrato quadratis ex A C in D E plus facto ex centum triginta quinque cubis ex A C in D E quadratum minus facto ex quindecim quadratis ex A C in D E cubum; idest si fiat

si fiat interpretatio, vt A E sit æqualis triplæ A C minus D E, & A B sit æqualis quintuplæ A C, & A D triplæ; erit quadrato cubus ex A E maior facto ex A B in A D in A E cubum minus facto ex B D in A D quadrato quadratum: Quare quadrato quadratum ex A E ad factum ex A B in A E cubum minus facto ex B D in A D cubum habebit maiorem rationem, quam A D ad A E, idest, quam D I ad E L; ergo factum ex A E quadrato quadrato in E L superabit factum ex A B in D I in A E cubum minus facto ex B D in D I in A D cubum; & si fiat Antithesis, factum ex B D in D I in A D cubum superabit factum ex A B in D I in A E cubum minus facto ex A E quadrato quadrato in E L; Ergo factum ex B D in D I ad factum ex A B in D I minus facto ex A E in E L habebit maiorem rationem, quam cubus ex A E ad cubum ex A D; sed factum ex A B in D I minus facto ex A E in E L est æquale facto ex Q E in E L; nam D I in A B æquatur facto ex E L in A Q; &, vt cubus ex A E ad cubum ex A D, ita E F ad D G; habebit igitur factum ex B D in D I ad factum ex Q E in E L maiorem rationem, quam habeat E F ad D G; ergo factum sub extremis superabit factum sub medijs; factum igitur ex B D in D I in D G superabit factum ex Q E in E L in E F, idest plano solidum applicatum duabus ex quinque partibus dati plani superabit plano solidum applicatum parti maiori, quam sint duæ ex quinque partibus dati plani, simili existente vtriusque defectu, quod erat primo loco demonstrandum.

Sit

Sit secundo datum planum A B in D I, cuius quinta pars sit A C in D I, & A D sit tripla ipsius A C; B D verò æquet reliquas duas quintas partes, & plano A B in D I sit æquale planum E L in A Q, & A E superet A D, & sint similes figuræ A E in E L, & A D in D I, &, vt cubus ex A D ad cubum ex A E, ita sit D G ad E F; erunt parallelepipeda ex A D in D G in D I, & ex A E in E F in E L plano solida similia, & facta ex B D in D G in D I, & ex Q E in E F in E L erunt plano solida eidē plano applicata deficientia plano solidis similibus, similiterque positis. Quia autem factum ex B D in D G in D I est applicatum duabus ex quinque partibus dati plani, & factum ex Q E in E F in E L est applicatum parti minori, quam sint duæ ex quinque partibus dati plani. Dico secundo factum ex B D in D G in D I superare factum ex Q E in E F in E L. Sit igitur

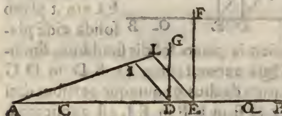


Analysis secundæ partis.

QVia factum ex B D in D G in D I supponitur superare factum ex Q E in E F in E L, habebit factum ex B D in D I ad factum ex Q E in E L maiorem rationem, quam habeat E F ad D G; sed factum ex Q E in E L est æquale facto ex A B in D I minus facto ex A E in E L; & E F ad D G est, vt cubus ex A E ad cubum ex A D per constructionem; Ergo

 factum

factum ex B D in D I ad factum ex A B in D I minus facto ex A E in E L habebit maiorem rationem, quam cubus ex A E ad cubum ex A D; & factum sub extremis superabit factum sub medijs; factum igitur ex B D in D I in cubum ex A D superabit factum ex A B in D I in cubum ex A E minus facto ex A E quadrato quadrato in E L; & si fiat Antithesis, erit factum ex A E quadrato quadrato in E L maius facto ex A B in D I in A E cubum minus facto ex B D in D I in A D cubum; & quadrato quadratum ex A E ad factum ex A B in A E cubum minus facto ex B D in A D cubum habebit maiorem rationem, quam D I ad E L,



idest A D ad A E; & factum sub extremis superabit factum sub medijs; ergo quadrato cubus ex A E superabit factum ex A B in A D in A E cubum minus facto ex B D in A D quadrato quadratum.

Quia autem A E est æqualis triplæ A C plus D E, & A B est æqualis quintuplæ A C, & A D triplæ; si fiat interpretatio, erit quadrato cubus ex A E æqualis aggregato ex ducentis quadraginta tribus quadrato cubis ex A C plus facto ex quadringentis quinque quadrato quadratis ex A C in D E plus facto ex ducentis septuaginta cubis ex A C in D E quadratum plus facto ex nonaginta quadratis ex A C in D E cubum plus facto ex quindecim A C in D E quadrato quadratum plus quadrato cubo ex D E; & factum ex A B

in A D in A E cubum minus facto ex B D in A D quadrato quadratum, facta interpretatione, erit æquale aggregato ex ducentis quadraginta tribus quadrato cubis ex A C plus facto ex quadringentis quinque quadrato quadratis ex A C in D E plus facto ex centum triginta quinque cubis ex A C in D E quadratum plus facto ex quindecim quadratis ex A C in D E cubum. Patet autem aggregatum æquale quadrato cubo ex A E superare hoc aggregatum; Quare sit

Synthesis secundæ partis.

QVia aggregatum ex ducentis quadraginta tribus quadrato cubis ex A C plus facto ex quadringentis quinque quadrato quadratis ex A C in D E plus facto ex ducentis septuaginta cubis ex A C in D E quadratum plus facto ex nonaginta quadratis ex A C in D E cubum plus facto ex quindecim A C in D E quadrato quadratum plus quadrato cubo ex D E superat aggregatum ex ducentis quadraginta tribus quadrato cubis ex A C plus facto ex quadringentis quinque quadrato quadratis ex A C in D E plus facto ex centum triginta quinque cubis ex A C in D E quadratum plus facto ex quindecim quadratis ex A C in D E cubum; idest, facta interpretatione (quia tripla A C plus D E est æqualis A E, & quintuplæ A C est æqualis A B, & triplæ A C est æqualis A D) & quadrato cubus ex A E superabit factum ex A B in A D in A E cubum minus facto ex B D in A D quadrato quadratum; Idcircò quadrato quadratum ex A E ad factum ex A B in A E cubum minus facto

 ex

ex B D in A D cubum habebit maiorem rationem, quam A D ad A E, ideſt, quam D I ad E L; & factum ſub extremis ſuperabit factum ſub medijs; factum igitur ex A E quadrato quadrato in E L ſuperabit factum ex A B in D I in A E cubum minus facto ex B D in D I in A D cubum; & facta Antitheſi factum ex B D in D I in A D cubum ſuperabit factum ex A B in D I in A E cubum minus facto ex A E quadrato quadrato in E L; & factum ex B D in D I ad factum ex A B in D I minus facto ex A E in E L habebit maiorem rationem, quam cubus ex A E ad cubum ex A D, ſeu quam E F ad D G, & quia factum ex A B in D I eſt æquale facto ex A Q in E L, erit factum ex A B in D I minus facto ex A E in E L æquale facto ex E Q in E L; ergo factum ex B D in D I ad factum ex E Q in E L habebit maiorem rationem, quam E F ad D G, & conſequenter factum ex B D in D I in D G ſuperabit factum ex E Q in E L in E F, ideſt plano ſolidum applicatum duabus ex quinque partibus ſuperabit plano ſolidum applicatum parti minori, quam ſint duæ ex quinque partibus dati plani, ſimili exiſtente defectu; cum autem etiam demonſtratum ſit ſuperare applicatum parti maiori, quam ſint duæ ex quinque partibus dati plani, patet eſſe omnium maximum, quod ſumpſimus demonſtrandum.

SCHOLIVM.

SI dentur duæ lineæ, quarum altera gerat vicem rationalis, altera verò poſſit datum planum, & quæratur tertia proportionalis poſita rationali prima, & ea, quæ poteſt da- *tum*

tum planum secunda, tertia inuenta erit similis dato plano, cuius segmenta similia erunt segmentis dati plani, & medio loco proportionalis inter segmentum similis dato plano, & rationalem erit similis ei, quæ potest segmentum dati plani; & si fiat, vt rationalis ad similem ei, quæ potest segmentum dati plani, ita similis segmento dati plani ad aliam, hæc quarto loco inuenta erit similis cubo eius, quæ potest segmentum dati plani; & factum ex simili alteri segmento dati plani in hanc erit simile plano solido; si autem fiat, vt rationalis ad quartam prius inuentam, ita similis alteri segmento dati plani ad aliam, hæc erit similis plano solido deficienti quadrato cubo; nam, vt rationalis ad similem segmento dati plani, ita similis cubo eius, quæ potest alterum segmentum dati plani ad aliam; cum autem rationalis ad similem segmento dati plani habeat duplicatam rationem eius, quam habet ad eam, quæ potest alterum segmentum; hinc fit, vt exurgat quadrato cubus; sed, ne dum breuis esse laboro obscurus nimium fiam hæc vlterius dilucidemus.

Sint datæ duæ lineæ A, & B, & A gerat vicem rationalis; B verò possit datum planum; si fiat, vt A ad B, ita B ad C plus D, erit C plus D similis dato plano, & C, & D erunt similes segmentis dati plani.

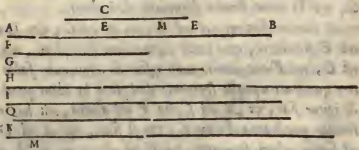
Si iterum fiat vt A ad E, ita E ad C, & C ad F, erit E similis ei, quæ potest segmentum dati plani, cui similis est C, & F erit similis cubo ipsius E, seù cubo facto ex latere quadrati æqualis segmento dati plani in idem quadratum. Si igitur fiat, vt A ad C, ita F ad aliam, erit hæc vltima similis quadrato cubo ex E; & si fiat, vt A ad D, quæ est similis alteri segmento, ita F ad aliam v. g. H, hæc erit similis plano solido applicato dato plano cum defectu quadrato cubi.

cubi. Quia autem A ad F habet rationem ſeſquiplicatam eius, quam habet A ad C; &, vt A ad F, ita D ad H, habebit D ad H rationem ſeſquiplicatam eius, quam habet A ad C. Hinc fit, vt eadem ſuperior propoſitio per lineas homologas, data rationali aptè proponatur, & demonſtretur ſequenti propoſitione: ideò ſit

Eadem propoſitio propoſita, & demonſtrata per lineas homologas data rationali.

Datis duabus rectis lineis, quarum altera non ſecta ſe habeat loco rationalis, altera verò ſecta ſit vtcunq; & alterum ipſius ſegmentum habeat ad aliam lineam rationem ſeſquiplicatam eius, quam habet non ſecta ad alterum ſegmentum. Dico hanc fore omnium maximam, quando ſegmentum ad quod refertur non ſecta erit æquale tribus ex quinque partibus datæ rectæ ſectæ, vel fuerit ſeſquialterum alterius ſegmenti.

SIT data rationalis C, & altera A B, quæ prius ſecetur in M; ita vt A M ſit ſeſquialtera ipſius



M B: ſecundo, vtcunque in E; ita, vt B E ſit maior, aut

aut minor ipsa B M, & inter C, & A M inueniatur medio loco proportionalis F, &, vt C ad F, ita fiat A M ad G; ita, vt sint continuè proportionales C, & F, & A M, & G; vt autem C ad G, ita fiat B M ad H; Quia C ad G habet sesquiplicatam rationem eius, quam habet ad A M, habebit B M ad H sesquiplicatam rationem eius, quam habet C ad A M.

Fiat iterum inter C, & A E media proportionalis I, & vt C ad I, ita A E ad Q: ita, vt sint continuè proportionales C, & I, & A E, & Q, vt autem C ad Q ita fiat B E ad K, habebit C ad Q sesquiplicatam rationem eius, quam habet ad A E; Quare B E ad K sesquiplicatam rationem habebit eius, quam habet C ad A E, & quia A M est sesquialtera ipsius B M. Dico H superare K.

Fiat, vt G ad H, ita Q ad M; tum considerentur tres quantitates Q, & G, & H; item aliæ tres Q, & M, & K; ita, vt ratio Q ad H sit composita ex ratione Q ad G, & ex ratione G ad H: ratio verò Q ad K sit composita ex ratione Q ad M, & M ad K. Quia ab eadem C sunt duæ series continuè proportionalium C & F, & A M, & G; item C, & I, & A E, & Q, habebit Q ad G sesquiplicatam rationem eius, quam habet A E ad A M; sed ex lemmate duodecimo B M ad B E habet maiorem rationem, quam sit ratio sesquiplicata A E ad A M; ergo B M ad B E habebit maiorem rationem, quam Q ad G: sed quia, per constructionem, vt C ad Q, ita B E ad K, erit vt C ad B E, ita Q ad K: Item quia, per constructionem, vt C ad G, ita B M ad H, erit vt C ad B M, ita G ad H:

sed

ſed vt G ad H, ita facta eſt Q ad M, erit igitur Q ad M, vt C ad B M; & quia, vt C ad B E, ita Q ad K, erit M ad K, vt B M ad B E; ſed B M ad B E habet maiorem rationem, quam Q ad G; ergo M ad K habebit maiorem rationem, quam Q ad G; ſed quia, vt G ad H, ita Q ad M, erit per rationem perturbatam ratio Q ad K maior, quam Q ad H: ergo H ſuperat K, quod erat probandum.

PROPOSITIO IX. ZETETICA.

Inuenire maximum plano ſolidum, quod poſſit applicari dato ſolido deficiens quadrato cubo.

SIT datum B ſolidum, & oporteat facere, quod imperatum eſt; ita erit ſecandum B ſolidum; vt ſi alterum ipſius ſegmentum effingatur in cubum, quod fit ex reliquo ſolidi in quadratum huius effícti cubi ſit maximum omnium eorum, quæ fieri poſſint ſi quomodocunque aliter ſecetur ſolidum datum.

Sit igitur ſegmentum A cubus, erit reliquum B ſolidum minus A cubo, quod ductum in A quadratum producet plano ſolidum applicatum B ſolido in A quadratum minus A quadrato cubo.

Sit ſecundo ſegmentum cubus ex A plus E, & E æquetur nihilo, ideſt cubus ex A plus triplici ſolido ex A quadrato in E plus triplici ſolido ex E quadrato in A plus cubo ex E; erit reliquum B ſolidum minus cubo ex A minus triplici ſolido ex A quadrato in E minus

minus triplici solido ex E quadrato in A minus E cubo, quod ductum in quadratum ex A plus duplici facto ex A in E plus E quadrato producet factum ex B solido in A quadratum plus duplici facto ex B solido in A in E plus facto ex B solido in E quadratum minus A quadrato cubo minus quintuplo facto ex A quadrato quadrato in E minus decuplo facto ex A cubo in E quadratum minus decuplo facto ex E cubo in A quadratum minus quintuplo facto ex A in E quadrato quadratum minus E quadrato cubo.

Vnde si detrahatur prius factum ex B solido in A quadratum minus A quadrato cubo, & reliquum applicetur ad E, & reiectis ijs, quæ ex E non liberantur, fiat Antithesis; erit duplex factum ex B solido in A æquale quintuplo quadrato quadrato ex A, & si omnia applicentur quinque A, etiam A cubus æquabitur duabus ex quinque partibus B solidi; sed cum ex A cubo efformari debeat A quadrato cubus, erit plano solidum applicatum dato solido deficiens quadrato cubo id, quod applicabitur reliquis tribus ex quinque partibus dati solidi. Hinc

PORISMA.

Maximum plano solidum, quod applicatur dato solido deficiens quadrato cubo est id, quod applicatur tribus ex quinque partibus dati solidi, & quadrato cubus, qui deficit occupat reliquas duas partes.

THEOREMA.

Omnium plano solidorum ad idem solidum applicatorum, & deficientium plano solidis similibus, similiterque positis maximum est, id quod tribus ex quinque partibus dati solidi applicatur.

SIT datum solidum ex A B in D I in D G; quinta autem pars ipsius A B sit A C, & A D ipsius A C sit dupla; erit B D æqualis tribus ex quinque partibus totius A B; & factum ex B D in D I in D G erit æquale tribus ex quinque partibus dati solidi; fiat solido ex A B in D I in D G æquale solidum ex A Q in E L in E F, & factum ex E A in E L in E F sit simile facto ex A D in D G in D I;

& E F ad D H habeat triplicatam rationem eius, quam habet E F ad D G, seu rationis A E ad A D; erunt parallelepipeda ex A D in D I in D H, & ex A E in E F in E L plano solida similia; similiterq; posita; & parallelepipeda ex B D in D H in D I, & ex Q E in E F in E L erunt plano solida eidem solido applicata deficientia plano solidis similibus, similiterq; positis.

plano solidum verò ex B D in D H in D I erit applicatum tribus ex quinque partibus dati solidi, & plano solidum ex Q E in E F in E L erit applicatum parti maiori, quam sint tres ex quinque partibus dati solidi: Quare

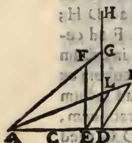
Dico primo plano solidum ex B D in D H in D I superare plano solidum ex Q E in E F in E L.

Analysis primæ partis.

QVia plano solidum ex B D in D H in D I supponitur superare plano solidum ex Q E in E F in E L; habebit factum ex B D in D I ad factum ex Q E in E L maiorem rationem, quam E F ad D H; idest per constructionem, quam cubus ex E F ad cubum ex D G; igitur factum ex B D in D I in cubum ex D G superabit factum ex Q E in E L in cubum ex E F; factum igitur ex B D in D I in D G ad factum ex Q E in E L in E F habebit maiorem rationem, quam quadratum ex E F ad quadratum ex D G; sed quia factum ex A Q in E L in E F est æquale facto ex A B in D I in D G, erit factum ex Q E in E L in E F æquale facto ex A B in D I in D G minus facto ex A E in E L in E F: Quamobrem factum ex B D in D I in D G ad factum ex A B in D I in D G minus facto ex A E in E L in E F habebit maiorem rationem; quam quadratum ex E F ad quadratum ex D G; idcircò factum ex B D in D I in D G cubum superabit factum ex A B in D I in D G in E F quadratum minus facto ex A E in E L in E F cubum; & per Antithesim factum ex A E in E L in E F cubum

 su-

superabit factum ex A B in D I in D G in E F quadratum minus facto ex B D in D I in D G cubum; & factum ex A E in E L in E F quadratum ad factum ex A B in D I in E F quadratum minus facto ex B D in D I in D G quadratum habebit maiorem rationem, quam D G ad E F, idest, quam A D ad A E; ergo factum ex A E quadrato in E L in E F quadratum superabit factum ex A D in A B in D I in E F quadratum minus facto ex A D in B D in D I in D G quadratum, & factum ex A E quadrato in E F quadratum ad factum ex A D in A B in E F quadratum minus facto ex A D in B D in D G quadratum habebit maiorem rationem, quam D I ad E L, idest A D ad A E; & factum ex A E cubo in E F quadratum superabit factum ex A D quadrato in A B in E F quadratum minus facto ex A D quadrato in B D in D G quadratum; & facta Antithesi factum ex A D quadrato in B D in D G quadratum superabit factum ex A D quadrato in A B in E F quadratum minus facto ex A E cubo in E F quadratum; & factum ex A D quadrato in B D ad factum ex A D quadrato in A B minus cubo ex A E habebit maiorem rationem, quam E F quadratum ad quadratum D G; idest



quam

quam A E quadratum ad quadratum A D; ergo factum ex A D quadrato quadrato in B D superabit factum ex A D quadrato in A B in A E quadratum minus quadrato cubo ex A E; & si fiat interpretatio, vt A D sit æqualis duplæ A C, & B D triplæ A C, & A B quintuplæ A C, & A E duplæ A C minus D E. Quadraginta, & octo quadrato cubi ex A C superabunt quadraginta, & octo quadrato cubos ex A C minus facto ex sexaginta cubis ex A C in D E quadratum plus facto ex quadraginta quadratis ex A C in D E cubum minus facto ex decupla A C in D E quadrato quadratum plus quadrato cubo ex D E; & si fiat Antithesis erit factum ex sexaginta cubis ex A C in D E quadratum plus facto ex decupla A C in D E quadrato quadratum maius facto ex quadraginta quadratis ex A C in D E cubum plus D E quadrato cubo; & si omnia applicentur ad D E quadratum, sexaginta cubi ex A C, vna cum facto ex decupla A C in D E quadratum superabunt factum ex quadraginta quadratis ex A C in D E plus D E cubo; Quod patet ex sequenti lemmate.

L E M M A.

Si fuerint duæ rectæ, & alterius dupla superet alteram. Dico sexaginta cubos ex prima, vna cum facto ex decupla prima in quadratum secundæ superare factũ ex quadraginta quadratis primæ in secundã, plus cubo secundæ.

Int duæ rectæ C, & E, & dupla C superet E. Dico sexaginta

C

E

cubos

cubos ex C, vna cum facto ex decupla C in E quadratum superare factum ex quadraginta quadratis ex C in E, plus E cubo.

Aut enim E deficit à C, aut est æqualis, aut maior; si deficiat, aut sit æqualis patet propositio; nam semper factum ex quadraginta quadratis ex C in E plus E cubo non excedet summam quadraginta vnius cubi ex C; ergo deficiet à sexaginta cubis ex C plus facto ex decupla C in E quadratum.

Sit vltimo E maior C, sed minor dupla C, & supponatur E æqualis C plus A, & C superare A; erit E quadratum æquale quadrato ex C plus duplici facto ex C in A plus A quadrato, & cubus ex E erit æqualis cubo ex C plus triplici facto ex C quadrato in A plus triplici facto ex A quadrato in C plus C cubo; & factum ex quadraginta quadratis ex C in E erit æquale quadraginta cubis ex C plus facto ex quadraginta quadratis ex C in A; & idcirco sexaginta cubi ex C, vna cum facto ex decupla C in E quadratum æquabuntur septuaginta cubis ex C plus facto ex viginti quadratis ex C in A plus facto ex decupla C in A quadratum; factum verò ex quadraginta quadratis ex C in E, vna cum E cubo erit æquale quadraginta, & vni cubo ex C plus facto ex quadraginta tribus quadratis ex C in A plus facto ex tribus quadratis ex A in C plus A cubo; Et si comparentur septuaginta cubi ex C plus facto ex viginti quadratis ex C in A plus facto ex decupla C in A quadratum cum quadraginta, & vno cubo ex C plus facto ex quadraginta tribus quadratis ex C in A plus facto ex tribus quadratis ex A in C plus A cubo; & si

& si vtrinq; demantur communia, remanebunt ex altera parte viginti nouem cubi ex C, vna cum facto ex septem C in A quadratum ; & ex altera factum ex viginti tribus quadratis ex C in A plus A cubo ; idest, quia A superat C, minus, quam viginti quatuor cubi ex C ; ergo multo minus, quam viginti nouem cubi ex C, vna cum facto ex septem C in A quadratum ; ergo sexaginta cubi ex C, vna cum facto ex decupla C in E quadratum superant factum ex quadraginta quadratis ex C in E plus E cubo ; ideò sit

Synthesis primæ partis.

QVia dupla A C superat D E, per lemma superius, sexaginta cubi ex A C, vna cum facto ex decupla A C in D E quadratum superabunt factum ex quadraginta quadratis ex A C in D E plus D E cubo ; & si omnia ducantur in D E quadratum, factum ex sexaginta cubis ex A C in D E quadratum, vna cum facto ex decupla A C in D E quadrato quadratum superabit factum ex quadraginta quadratis ex A C in D E cubum plus D E quadrato cubo ; si vtrique parti addantur quadraginta, & octo quadrato cubi ex A C ; aggregatum ex quadraginta, & octo quadrato cubis ex A C plus facto ex sexaginta cubis ex A C in D E quadratum plus facto ex decupla A C in D E quadrato quadratum superabit aggregatum ex quadraginta, & octo quadrato cubis ex A C plus facto ex quadraginta quadratis ex A C in D E cubum plus D E quadrato cubo ; & facta Antithesi quadraginta, & octo quadrato cubi ex A C superabunt quadraginta, & octo

quadrato cubos ex A C minus facto ex sexaginta cubis ex A C in D E quadratum plus facto ex quadraginta quadratis ex A C in D E cubum minus facto ex decupla A C in D E quadrato quadratum plus quadrato cubo ex D E; ideſt (facta interpretatione, vt A D ſit æqualis duplæ A C, & B D triplæ A C, & A B quintuplæ A C, & A E duplæ A C minus C E) factum ex A D quadrato quadrato in B D ſuperabit factum ex A D quadrato in A B in A E quadratum minus quadrato cubo ex A E. Quamobrem factum ex A D quadrato in B D ad factum ex A D quadrato in A B minus cubo ex A E habebit maiorem rationem, quam quadratum ex A E ad quadratum ex A D, ideſt, quam E F quadratum ad quadratum D G; factum igitur ex A D quadrato in B D in D G quadratum ſuperabit factum ex A D quadrato in A B in E F quadratum minus facto ex A E cubo in E F quadratum; & per Antitheſim factum ex A E cubo in E F quadratum ſuperabit factum ex A D quadrato in A B in E F quadratum minus facto ex A D quadrato in B D in D G quadratum; & factum ex A E quadrato in E F quadratum ad factum ex A D in A B in E F quadratum minus facto ex A D in B D in D G quadratum habebit maiorem rationem, quam A D ad A E, ideſt, quam D I ad E L, & factum ex A E quadrato in E F quadratum in E L ſuperabit factum ex A D in A B in D I in E F quadratum minus facto ex A D in B D in D I in D G quadratum; Quare factum ex A E in E F quadratum in E L ad factum ex A B in D I in E F quadratum minus facto ex B D in D I in D G quadratum

dratum habebit maiorem rationem, quam A D ad A E, id est; quam D G ad E F; & factum ex A B in E L in E F cubum superabit factum ex A B in D I in D G in E F quadratum minus facto ex B D in D I in D G cubum; & per Antithesim, factum ex B D in D I in D G cubum superabit factum ex A B in D I in D G in E F quadratum minus facto ex A B in E L in E F cubum; Quamobrem factum ex B D in D I in D G ad factum ex A B in D I in D G minus facto ex A E in E L in E F habebit maiorem rationem, quam E F quadratum ad quadratum D G; sed quia factum ex A B in D I in D G est æquale facto ex A Q in E L in E F, erit factum ex A B in D I in D G minus facto ex A E in E L in E F æquale facto ex Q E in E L in E F; ergo factum ex B D in D I in D G ad factum ex Q E in E L in E F habebit maiorem rationem, quam E F quadratum ad quadratum D G; & factum ex B D in D I in D G cubum superabit factum ex Q E in E L in E F cubum. Quare factum ex B D in D I ad factum ex Q E in E L habebit maiorem rationem, quam E F cubus ad cubum D G; sed E F cubus ad cubum D G, per constructionem, est vt E D ad D H; Ergo factum ex B D in D I in D H superabit factum ex Q E in E L in E F, id est plano solidum applicatum tribus ex quinque partibus dati solidi superabit plano solidum applicatum parti maiori; quam sint tres ex quinque partibus dati solidi cum simili defectu; quod sumpsimus primo loco demonstrandum.

Sit secundo datum solidum ex A B in D I in D G; quinta autem pars ipsius A B sit A C, & A D ipsius

A C sit dupla, erit B D æqualis tribus ex quinque partibus totius A B; & factum ex B D in D I in D G erit æquale tribus ex quinque partibus dati solidi. Fiat solido A B in D I in D G æquale solidum ex A Q in E L in E F, & factum ex E A in E L in E F sit simile facto ex A D in D G in D I, & D G ad E H habeat triplicatam rationem eius, quam habet D G ad E F, seu rationis A D ad A E; erunt parallelepipeda ex A D in D I in D G, & ex A E in E H in E L plano solida similia, similiterq; posita; & parallelepipeda ex B D in D G in D I, & ex Q E in E H in E L erunt plano solida eidem solido applicata deficientia plano solidis similibus, similiterq; positis: Plano solidum verò ex B D in D G in D I erit applicatum tribus ex quinque partibus dati solidi; & plano solidum ex Q E in E H in E L erit applicatum parti minori, quam sint tres ex quinque partibus dati solidi. Quare

Dico secundo plano solidum ex B D in D G in D I superare plano solidum ex Q E in E H in E L. Sit igitur

Analysis secundæ partis.

QVia plano solidum ex B D in D G in D I supponitur superare plano solidum ex Q E in E H in E L; habebit factum ex B D in D I ad factum ex Q E in E L maiorem rationem, quam E H ad D G; idest per constructionem, quam habet cubus ex E F ad cubum ex D G; igitur factum ex B D in D I in cubum ex D G superat factum ex Q E in E L in cubum ex E F; factum igitur ex B D in D I in D G ad factum ex Q E in E L in E F habet maiorem rationem, quam quadratum ex E F ad quadratum ex D G; sed quia factum ex A Q in E L in E F est æquale facto ex A B in D I in D G, erit factum ex Q E in E L in E F æquale facto ex A B in D I in D G minus facto ex A E in E L in E F: Quamobrem factum ex B D in D I in D G ad factum ex A B in D I in D G minus facto ex A E in E L in E F habebit maiorem rationem, quam quadratum ex E F ad quadratum ex D G; idcirco factum ex B D in D I in D G cubum superabit factum ex A B in D I in D G in E F quadratum minus facto ex A E in E L in E F cubum; & per Antithesim, factum ex A E in E L in E F cubum superabit factum ex A B in D I in D G in E F quadratum minus facto ex B D in D I in D G cubum; & factum ex A E in E L in E F quadratum ad factum ex A B in D I in E F quadratum minus facto ex B D in D I in D G quadratum habebit maiorem rationem, quam D G ad E F, idest quam A D ad A E; ergo factum ex A E quadrato in E L in E F quadratum superabit

factum ex A D in D I in A B in E F quadratum minus facto ex A D in B D in D I in D G quadratum; & factum ex A E quadrato in E F quadratum ad factum ex A D in A B in E F quadratum minus facto ex A D in B D in D G quadratum habebit maiorem rationem, quam D I ad E L, idest A D ad A E; ergo factum ex A E cubo in E F quadratum superabit factum ex A D quadrato in A B in E F quadratum minus facto ex A D quadrato in B D in D G quadratum; & facta Antithesi, erit factum ex A D quadrato in B D in D G quadratum maius facto ex A D quadrato in A B in E F quadratum minus facto ex A E cubo in E F quadratum; & factum ex A D quadrato in B D ad factum ex A D quadrato in A B minus cubo ex A E habebit maiorem rationem, quam E F quadratum ad quadratum D G; idest, quam A E quadratum ad quadratum A D; ergo factum ex A D quadrato quadrato in B D superabit factum ex A D quadrato in A B in A E quadratum minus quadrato cubo ex A E; & per Antithesim quadrato cubus ex A E superabit factum ex A D quadrato in A B in A E quadratum minus facto ex A D quadrato quadrato in B D; Et si fiat inter-

pretatio; vt A E sit æqualis duplici A C plus D E, & A D sit æqualis duplici A C, & D B triplici A C, & A B quintuplæ A C; aggregatum ex triginta duobus quadrato cubis ex A C plus facto ex octoginta quadrato quadratis ex A C in D E plus facto ex octoginta cubis ex A C in D E quadratum plus facto ex quadraginta cubis ex D E in A C quadratum plus facto ex decupla A C in D E quadrato quadratum plus quadrato cubo ex D E superabit aggregatum ex triginta duobus quadrato cubis ex A C plus facto ex octoginta quadrato quadratis ex A C in D E plus facto ex viginti cubis ex A C in D E quadratum; quod patet. Quare sit

Synthesis secundæ partis.

QVia aggregatum ex triginta duobus quadrato cubis ex A C plus facto ex octoginta quadrato quadratis ex A C in D E plus facto ex octoginta cubis ex A C in D E quadratum plus facto ex quadraginta cubis ex D E in A C plus facto ex decupla A C in D E quadrato quadratum plus quadrato cubo ex D E superat aggregatum ex triginta duobus quadrato cubis ex A C plus facto ex octoginta quadrato quadratis ex A C in D E plus facto ex viginti cubis ex A C in D E quadratum; & si fiat interpretatio, vt A E sit æqualis duplici A C plus D E, & A D sit æqualis duplici A C, & D B triplici A C, & A B quintuplici A C; quadrato cubus ex A E superabit factum ex A D quadrato in A B in A E quadratum minus facto ex A D quadrato quadrato in B D; & facta

facta Antithesi, factum ex A D quadrato quadrato in B D superabit factum ex A D quadrato in A B in A E quadratum minus quadrato cubo ex A E. Quare factum ex A D quadrato in B D ad factum ex A D quadrato in A B minus cubo ex A E habebit maiorem rationem, quam quadratum ex A E ad quadratum ex A D, idest quam E F quadratum ad quadratum D G, & factum ex A D quadrato in B D in D G quadratum superabit factum ex A D quadrato in A B in E F quadratum minus facto ex cubo A E in E F quadratum; & per Antithesim, factum ex cubo A E in E F quadratum superabit factum ex A D quadrato in A B in E F quadratum minus facto ex A D quadrato in B D in D G quadratum; & factum ex quadrato A E in E F quadratum ad factum ex A D in A B in E F quadratum minus facto ex A D in B D in D G quadratum habebit maiorem rationem, quam A D ad A E, idest quam D I ad E L; ergo factum ex A E quadrato in E F quadratum in E L superabit factum ex A D in D I in A B in E F quadratum minus facto ex A D in B D in D I in D G quadratum; & factum ex A E in E L in E F quadratum ad factum ex A B in D I in E F quadratum minus facto ex B D in D I in D G quadratum habebit maiorem rationem, quam A D ad A E, idest D G ad E F; & factum ex A E in E L in E F cubum superabit factum ex A B in D I in E F quadratum in D G minus facto ex B D in D I in D G cubum; & per Antithesim, factum ex B D in D I in D G cubum superabit factum ex A B in D I in E F quadratum in D G minus facto ex A E

in

in E L in E F cubum ; & factum ex B D in D I in D G ad factum ex A B in D I in D G minus facto ex A E in E L in E F habebit maiorem rationem, quam E F quadratum ad D G quadratum ; sed quia factum ex A Q in E L in E F est æquale facto ex A B in D I in D G, erit factum ex A B in D I in D G minus facto ex A E in E L in E F æquale facto ex Q E in E L in E F : Quare factum ex B D in D I in D G ad factum ex Q E in E L in E F habebit maiorem rationem, quam E F quadratum ad D G quadratum ; & factum ex B D in D I in D G cubum superabit factum ex Q E in E L in E F cubum : Quamobrem factum ex B D in D I ad factum ex Q E in E L habebit maiorem rationem, quam E F cubus ad cubum D G ; sed, vt E F cubus ad cubum D G, ita est ex constructione E H ad D G ; ergo factum ex B D in D I ad factum ex Q E in E L habebit maiorem rationem, quam E H ad D G ; & factum ex B D in D I in D G superabit factum ex Q E in E L in E H, idest plano solidum applicatum tribus ex quinque partibus dati solidi superabit plano solidum applicatum parti minori, quam sint tres ex quinque partibus dati solidi simili existente defectu ; cum verò etiam demonstratum sit superare id, quod est applicatum parti maiori, quam sint tres ex quinque partibus dati solidi, hinc patet esse omnium maximum, quod erat demonstrandum.

SCHO-

SCHOLIVM.

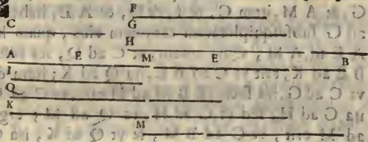
SI dentur duæ lineæ, quarum altera gerat vicem rationalis; altera verò possit datum solidum, & quæratur quarta proportionalis posita rationali prima, & ea, quæ potest datum solidum secunda; quarta inuenta erit similis dato solido, cuius segmenta similia erunt segmentis dati solidi, & prima duarum medio loco proportionalium inter rationalem, & segmentum similis dato solido erit similis ei, quæ potest cubum æqualem segmento dati solidi; secunda verò duarum medio loco proportionalium inter rationalem, & segmentum similis dato solido erit similis quadrato eius, quæ potest cubum æqualem segmento dati solidi, & rationalis ad hanc habebit rationem subsesquiplicatam eius rationis, quam habet ad similem segmento dati solidi; & si fiat vt rationalis ad hanc, ita similis reliquo segmento dati solidi ad aliam, erit hæc vltimo loco inuenta similis plano solido applicato dato solido cum defectu quadrato cubi. Quare in id recidet quæstio, vt data rationali, & simili dato solido similis dato solido ita secetur, vt si fiat alterum segmentum similis dato solido ad aliam in ratione subsesquiplicata rationis, quam habet rationalis ad alterum segmentum hæc sit omnium maxima. Hinc fit, vt eadem superior propositio per lineas homologas data rationali ipse proponatur, & demonstretur sequenti propositione. Idea sit.

Eadem propositio proposita, & demonstrata per lineas homologas data rationali.

Datis duabus rectis lineis, quarum altera non secta se habeat loco rationalis; altera verò

ſecta ſit vtcunque, & alterum ipſius ſegmentum habeat ad aliam rectam lineam rationem ſubſeſquiplicatam eius, quam habet non ſecta ad alterum ſegmentum. Dico hanc fore omnium maximam, quando ſegmentum, ad quod refertur non ſecta erit æquale duabus ex quinque partibus datæ rectæ, vel fuerit ſubſeſquialterum alterius ſegmenti.

SIT data rationalis C, & altera A B, quæ prius



ſecetur in M; ita, vt A M ſit ſubſeſquialtera ipſius M B; ſecundo, vtcunq; in E; ita vt B E ſit maior, aut minor ipſa B M, & inter C, & A M ſupponantur duæ mediæ proportionales F, & G; ita, vt ſint continuè proportionales C, & F, & G, & A M; vt autem C ad G; ita fiat B M ad H. Quia C ad G habet rationem ſubſeſquiplicatam eius, quam habet ad A M, habebit B M ad H rationem ſubſeſquiplicatam eius, quam habet C ad A M.

Supponantur iterum inter C, & A E duæ mediæ proportionales I, & Q; ita vt ſint continuè propor-

tionales C, & I, & Q, & A E; vt autem C ad Q, ita fiat B E ad K, habebit C ad Q subsesquiplicatam rationem eius, quam habet C ad A E; Quare B E ad K habebit rationem subsesquiplicatam eius, quam habet C ad A E; & quia A M est subsesquialtera ipsius B M. Dico H superare K.

Fiat vt G ad H, ita Q ad M, & considerentur tres quantitates Q, & G, & H; item aliæ tres Q, & M, & K, erit ratio Q ad H composita ex ratione Q ad G, & G ad H; ratio vero Q ad K erit composita ex ratione Q ad M, & M ad K; & quia ab eadem C sunt duæ series continuè proportionalium C, & F, & G, & A M, item C, & I, & Q, & A E, habebit Q ad G subsesquiplicatam rationem eius, quam habet A E ad A M; Quia autem, vt C ad Q, ita facta est B E ad K, erit vt C ad B E, ita Q ad K; item quia, vt C ad G, ita facta est B M ad H erit, vt C ad B M, ita G ad H; sed vt G ad H, ita Q ad M; ergo Q ad M erit, vt C ad B M, & vt Q ad K, ita C ad B E; ergo M ad K erit, vt B M ad B E: sed per lemma decimum tertium, B M ad B E habet maiorem rationem, quam sit ratio subsesquiplicata A E ad A M, idest quam sit ratio Q ad G, & G ad H habet eandem rationem, quam habet Q ad M; ergo per Analogiam perturbatam Q ad K habebit maiorem rationem, quam Q ad H, ergo H superat K, quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO X. ZETETICA.

Inuenire maximum plano solidum, quod possit applicari dato plano plano deficiens quadtato cubo.



IT datum B plano planum, & oporteat facere, quod imperatum est; ita erit secandum B plano planum; vt si ex altero ipsius segmento efficiatur quadrato quadratum, quod fit ex reliquo plano plani in latus dicti quadrato quadrati sit maximum omnium eorum, quæ fieri possint, si quomodocunque aliter secetur plano planum datum.

Sit igitur primo segmentum A quadrato quadratum, erit reliquum B plano planum minus A quadrato quadrato, quod ductum in A producet plano solidum applicatum B plano planum in A minus A quadrato cubo.

Sit secundo segmentum quadrato quadratum ex A plus E, & E æquetur nihilo; idest quadrato quadratum ex A plus quadruplo plano plano ex A cubo in E plus sextuplo plano plano ex A quadrato in E quadratum plus quadruplo plano plano ex A in E cubum plus E quadrato quadrato; erit reliquum B plano planum minus A quadrato quadrato minus quadruplo plano plano ex A cubo in E minus sextuplo plano plano ex A quadrato in E quadratum minus quadruplo plano plano ex A in E cubum minus E quadrato quadrato; quod ductum in A, plus E producet factum ex B plano plano in A plus facto ex B plano plano in E minus quadrato cubo ex A minus facto ex quintuplo A qua-

drato quadrato in E minus facto ex decuplo A cubo in E quadratum minus facto ex decuplo A quadrato in E cubum minus quintuplo facto ex A in E quadrato quadratum minus E quadrato cubo. Vnde si detrahatur prius factum ex B plano plano in A minus A quadrato cubo, & reliquum applicetur ad E, & reiectis ijs, quæ ex E non liberantur, fiat reliqui Antithesis; erit quintuplum A quadrato quadratum æquale B plano plano; &, si vtraq; pars quintupartiatur, erit A quadrato quadratum æquale quintæ parti B plano plani; & cum ex A quadrato quadrato effingi debeat quadrato cubus, erit plano solidum applicatum dato plano plano deficiens quadrato cubo id, quod applicatur reliquis quatuor ex quinque partibus dati plano plani. Hinc

PORISMA.

Maximum plano solidum, quod applicatur dato plano plano deficiens quadrato cubo est id, quod applicatur quatuor ex quinq; partibus dati plano plani, & quadrato cubus, qui deficit occupat reliquam quintam partem.

THEOREMA.

Omnium plano solidorum ad idem plano planum applicatorum, & deficientium plano solidis similibus, similiterq; positis maximum est id, quod quatuor ex quinq; partibus dati solidi applicatur.

SIT primo datum parallelepipedum ex A B, in D I, in D G datum plano planum, & quinta pars ipsius A B sit A D, erit B D æqualis quatuor

quatuor ex quinque partibus totius A B, & factum ex B D in D I in D G erit æquale quatuor ex quinque partibus dati parallelepipedi; fiat parallelepipedo ex A B in D I in D G æquale parallelepipedum ex A Q in E L in E F, ea lege, vt factum ex E A in E L sit simile facto ex A D in D I, sed E F ad D G habeat duplicatam rationem eius, quam habet A E ad A D, erunt parallelepipeda ex A E in E F in E L, & ex A D in D I in D G plano plana similia; fiat iterum, vt A E ad A D, ita D G ad D H, erunt parallelepipeda ex A E in E F in E L, & ex A D in D H in D I plano solida similia, similiterq; posita; & parallelepipeda ex D B in D I in D H, & ex E Q in E L in E F erunt plano solida eidem plano plano applicata deficientia plano solidis similibus, similiterq; positis; & parallelepipedum ex D B in D I in D H erit applicatum quatuor ex quinque partibus dati plano plani; parallelepipedum verò ex E Q in E L in E F erit applicatum parti maiori, quam sint quatuor ex quinque partibus dati plano plani simili existente defectu. Dico primo plano solidum ex D B in D I in D H superare plano solidum ex E Q in E L in E F.

Analysis primæ partis.

QVia plano solidum ex D B in D I in D H supponitur superare plano solidum ex E Q in E L in E F, habebit factum ex B D in D I ad factum ex Q E in E L maiorem rationem, quam E F ad D H; idest, per constructionem, quam cubus ex A E ad cubum ex A D; sed cubus ex A E est id, quod fit ex

A E

A E quadrato in A E, & cubus ex A D est id, quod fit ex A D quadrato in A D, &, vt A E quadratum ad A D quadratum, ita E F ad D G; ergo vt cubus ex A E ad cubum ex A D, ita erit factum ex A E in E F ad factum ex A D in D G; Quare factum ex B D in D I ad factum ex Q E in E L habebit maiorem rationem, quam factum ex A E in E F ad factum ex A D in D G; ergo factum ex B D in D I in A D in D G superabit factum ex Q E in E L in A E in E F; sed, quia per constructionem factum ex A Q in E L in E F est æquale facto ex A B in D I in D G, erit factum ex Q E in E L in E F æquale facto ex A B in D I in D G minus facto ex A E in E L in E F; quare, facta interpretatione, factum ex B D in D I in A D in D G superabit factum ex A B in D I in D G in A E minus facto ex A E quadrato in E L in E F; & facta Antithesi, factum ex A E quadrato in E L in E F superabit factum ex A B in D I in D G in A E minus facto ex B D in D I in A D in D G, & factum ex A E quadrato in E L ad factum ex A B in D I in A E minus facto ex B D in D I in A D habebit maiorem rationem, quam D G ad A F, idest, quam A D quadratum ad A E quadratum per constructionem; ergo factum ex A E quadrato quadrato in E L superabit factum ex A B in D I in A E in A D quadratum minus facto ex B D in D I

in

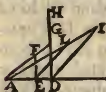
in A D cubum, & A E quadrato quadratum ad factum ex A B in A E in A D quadratum minus facto ex B D in A D cubum habebit maiorem rationem, quam D I ad E L, ideſt, quam A D ad A E; & A E quadrato cubus ſuperabit factum ex A B in A E in A D cubum minus facto ex B D in A D quadrato quadratum. Fiat interpretatio, vt A E ſit æqualis A D minus D E, & A B ſit æqualis quintuplæ A D, & B D ſit æqualis quadruplæ A D; erit quadrato cubus ex A E æqualis quadrato cubo ex A D minus quintuplo plano ſolido ex A D quadrato quadrato in D E plus decuplo plano ſolido ex A D cubo in D E quadratum minus decuplo plano ſolido ex A D quadrato in D E cubum plus quintuplo plano ſolido ex A D in D E quadrato quadratum minus D E quadrato cubo, & factum ex A B in A E in A D cubum minus facto ex B D in A D quadrato quadratum erit æquale A D quadrato cubo minus quintuplo plano ſolido ex A D quadrato quadrato in D E; ergo aggregatum ex quadrato cubo ex A D minus quintuplo plano ſolido ex A D quadrato quadrato in D E plus decuplo plano ſolido ex A D cubo in D E quadratum minus decuplo plano ſolido ex A D quadrato in D E cubum plus quintuplo plano ſolido ex A D in D E quadrato quadratum minus D E quadrato cubo ſuperabit A D quadrato cubum minus quintuplo plano ſolido ex A D quadrato quadrato in D E; & ſi fiat Antitheſis, & demantur communia, decuplum plano ſolidum ex A D cubo in D E quadratum plus quintuplo plano ſolido ex A D in D E quadrato quadratum ſu-

perabit

perabit decuplum plano solidum ex A D quadrato in D E cubum plus D E quadrato cubo. Vtraq; pars applicetur ad D E quadratum; decuplus cubus ex A D plus quintuplo solido ex A D in D E quadratum superabit decuplum solidum ex A D quadrato in D E plus D E cubo, quod patet, quia A D superat D E; Quare sit

Synthesis primæ partis.

QVia A D superat D E decuplus cubus ex A D plus quintuplo solido ex A D in D E quadratum superabit decuplum solidum ex A D quadrato in D E plus cubo ex D E; &, si vtraq; pars ducatur in D E quadratum; decuplum plano solidum ex A D cubo in D E quadratum plus quintuplo plano solido ex A D in D E quadrato quadratum superabit decuplum plano solidum ex A D quadrato in D E cubum plus D E quadrato cubo; si vtriq; parti addatur A D quadrato cubus minus quintuplo plano solido ex A D quadrato quadrato in D E; aggregatum ex quadrato cubo ex A D minus quintuplo plano solido ex A D quadrato quadrato in D E plus decuplo plano solido ex A D cubo in D E quadratum plus quintuplo plano solido ex A D in D E quadrato quadratum superabit aggregatum ex A D quadrato cubo minus quintuplo plano solido ex A D quadrato quadrato in D E plus decuplo plano solido ex A D qua-



drato in D E cubum plus D E quadrato cubo; & per Antithesim, aggregatum ex quadrato cubo ex A D minus quintuplo plano solido ex A D quadrato quadrato in D E plus decuplo plano solido ex A D cubo in D E quadratum minus decuplo plano solido ex A D quadrato in D E cubum plus quintuplo plano solido ex A D in D E quadrato quadratum minus D E quadrato cubo superabit aggregatum ex A D quadrato cubo minus quintuplo plano solido ex A D quadrato quadrato in D E; idest, facta interpretatione, vt A D minus D E sit æqualis A E, & quintupla A D sit æqualis A B, & quadrupla A D sit æqualis B D; Quadrato cubus ex A E superabit factum ex A B in A E in A D cubum minus facto ex B D in A D quadrato quadratum; Quare A E quadrato quadratum ad factum ex A B in A E in A D quadratum minus facto ex B D in A D cubum habebit maiorem rationem, quam A D ad A E, idest quam D I ad E L; & factum ex A E quadrato quadrato in E L superabit factum ex A B in A E in A D quadratum in D I minus facto ex B D in A D cubum in D I; quare factum ex A E quadrato in E L ad factum ex A B in D I in A E minus facto ex B D in D I in A D habebit maiorem rationem, quam A D quadratum ad A E quadratum, idest, per constructionem, quam D G ad E F; & factum ex A E quadrato in E L in E F superabit factum ex A B in D I in A E in D G minus facto ex B D in D I in A D in D G, & facta Antithesi factum ex B D in D I in A D in D G superabit factum ex A B in D I in A E in D G minus facto ex A E quadrato in E L in E F; sed quia, per constructionem, factum ex A Q

in E L in E F est æquale facto ex A B in D I in D G, erit factum ex A B in D I in D G minus facto ex A E in E L in E F æquale facto ex Q E in E L in E F. Quare facta interpretatione, factum ex B D in D I in A D in D G superabit factum ex Q E in E L in E F in A E, & factum ex B D in D I ad factum ex Q E in E L habebit maiorem rationem, quam factum ex A E in E F ad factum ex A D in D G; sed, vt E F ad D G, ita A E quadratum ad A D quadratum; quare factum ex A E in E F ad factum ex A D in D G erit, vt A E cubus ad A D cubum; idcircò factum ex B D in D I ad factum ex Q E in E L habebit maiorem rationem, quam cubus ex A E ad cubum ex A D, idest per constructionem, quam E F ad D H; ergo factum ex B D in D I in D H superabit factum ex Q E in E L in E F; idest plano solidum, quod applicatur quatuor ex quinque partibus dati plano plani superabit plano solidum, quod applicatur parti maiori, quam sint quatuor ex quinque partibus dati plano plani simili existente defectu, quod sumpsimus primo loco demonstrandũ.

Sit secundo datum parallelepipedum ex A B in D I in D G datum plano planum, & quinta pars ipsius A B sit A D, erit B D æqualis quatuor ex quinque partibus totius A B, & factum ex B D in D I in D G erit ęquale quatuor ex quinque partibus dati parallelepipedi; fiat parallelepipedo ex A B in D I in D G æquale parallelepipedum ex A Q in E L in E F, ea lege, vt factum ex E A in E L sit simile facto ex A D in

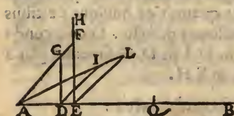
in D I; sed E F ad D G habeat duplicatam rationem eius, quam habet A E ad A D, erunt parallelepipeda ex A E in E F in E L, & ex A D in D I in D G plano plana similia; fiat autem, vt A D ad A E, ita E F ad E H; erunt parallelepipeda ex A E in E H in E L, & ex A D in D I in D G plano solida similia, similiterq; posita, & parallelepipeda ex B D in D I in D G, & ex E Q in E L in E H erunt plano solida eidem plano plano applicata deficientia plano solidis similibus, similiterq; positis; & parallelepipedum ex D B in D I in D G erit applicatum quatuor ex quinque partibus dati plano plani; parallelepipedum verò ex E Q in E L in E H erit applicatum parti minori, quam sint quatuor ex quinque partibus dati plano plani simili existente defectu. Dico secundo plano solidum ex B D in D I in D G superare plano solidum ex E Q in E L in E H.

Analysis secundæ partis.

QVia plano solidum ex B D in D I in D G supponitur superare plano solidum ex E Q in E L in E H, habebit factum ex B D in D I ad factum ex Q E in E L maiorem rationem, quam E H ad D G, idest per constructionem, quam cubus ex A E ad cubum ex A D; sed cubus ex A E ad cubum ex A D habet rationem compositam ex A E ad A D, & ex quadrato A E ad quadratum A D, idest E F ad D G; sed rationem compositam ex A E ad A D, & E F ad D G habet etiam factum ex A E in E F ad factum ex A D in D G; ergo factum ex B D in D I ad factum ex Q E in E L habet maiorem rationem, quam factum ex A E in E F ad factum ex A D in

 D G;

D G; ergo factum ex B D in D I in A D in D G superabit factum ex Q E in E L in A E in E F; sed quia per constructionem factum ex A Q in E L in E F est æquale facto ex A B in D I in D G, erit factum ex Q E in E L in E F æquale facto ex A B in D I in D G minus facto ex A E in E L in E F; Quare, facta interpretatione, factum ex B D in D I in A D in D G superabit factum ex A B in D I in D G in A E minus facto ex A E quadrato in E L in E F; & facta Antithesi, factum ex A E quadrato in E L in E F superabit factum ex A B in D I in D G in A E minus facto ex B D in D I in A D in D G; & factum ex A E quadrato in E L ad factum ex A B in D I in A E minus facto ex B D in D I in A D habebit maiorem rationẽ, quam D G ad E F; idest, quam A D quadratum ad A E quadratum per constructionem; Ergo



factum ex A E quadrato quadrato in E L superabit factum ex A B in D I in A E in A D quadratum minus facto ex B D in D I in A D cubum; & A E quadrato quadratũ ad factum ex A B in A E in A D quadratum minus facto ex B D in A D cubum habebit maiorem rationem, quam D I ad E L; idest, quam A D ad A E; & A E quadrato cubus superabit factum ex A B in A E in A D cubum minus facto ex B D in A D quadrato quadratum. Fiat interpretatio vt A E sit æqualis A D plus D E, & A B sit æqualis quintuplæ A D, & B D sit æqualis quadruplæ A D, erit quadrato cubus ex A E æqualis aggregato ex quadrato cubo ex A D plus quintuplo plano solido ex

A D

A D quadrato quadrato in D E plus decuplo plano ſolido ex A D cubo, in D E quadratum plus decuplo plano ſolido ex A D quadrato in D E cubum plus quintuplo plano ſolido ex A D in D E quadrato quadratum plus D E quadrato cubo, quod aggregatum patet ſuperare aggregatum ex A D quadrato cubo plus quintuplo plano ſolido ex A D quadrato quadrato in D E, quod per interpretationem æquatur facto ex A B in A E in A D cubum, minus facto ex B D in A D quadrato quadratum; quare patet concluſio. Sit igitur

Syntheſis ſecundæ partis.

QVia quadrato cubus ex A D plus quintuplo plano ſolido ex A D quadrato quadrato in D E plus decuplo plano ſolido ex A D cubo in D E quadratum plus decuplo plano ſolido ex A D quadrato in D E cubum plus quintuplo plano ſolido ex A D in D E quadrato quadratum plus D E quadrato cubo ſuperat quadrato cubum ex A D plus quintuplo plano ſolido ex A D quadrato quadrato in D E; ideſt, ſi fiat interpretatio, vt A D plus D E ſit æqualis A E, & quintuplæ A D ſit æqualis A B; quadruplæ verò A D ſit æqualis B D; quia quadrato cubus ex A E ſuperat factum ex A B in A E in A D cubum minus facto ex B D in A D quadrato quadratum; habebit A E quadrato quadratum ad factum ex A B in A E in A D quadratum minus facto ex B D in A D cubum maiorem rationem, quam A D ad A E, ideſt D I ad E L; & factum ex A E quadrato quadrato in E L ſuperabit factum ex A B in D I in A E in A D quadratum minus facto ex B D in D I in A D cubum; Quare factum

 ex

ex A E quadrato in E L ad factum ex A B in D I in A E minus facto ex B D in D I in A D habebit maiorem rationem, quam A D quadratum ad A E quadratum; idest per constructionem, quam D G ad E F; & factum ex A E quadrato in E L in E F superabit factum ex A B in D I in A E in D G minus facto ex B D in D I in A D in D G; & per Antithesim, factum ex B D in D I in A D in D G superabit factum ex A B in D I in A E in D G minus facto ex A E quadrato in E L in E F; sed, quia per constructionem, factũ ex A B in D I in D G est æquale facto ex A Q in E L in E F; erit factum ex A B in D I in D G minus facto ex A E in E L in E F æquale facto ex Q E in E L in E F; quare si fiat interpretatio, factum ex B D in D I in A D in D G superabit factũ ex Q E in E L in E F in A E; ergo factum ex B D in D I ad factum ex Q E in E L habebit maiorem rationem, quam factum ex A E in E F ad factum ex A D in D G, sed factum ex A E in E F ad factum ex A D in D G habet rationem, compositam ex ratione A E ad A D, & E F ad D G; idest quadrati A E ad A D quadratum per constructionem; sed hanc eandem rationem habet cubus ex A E ad cubum ex A D, ergo factum ex B D in D I ad factum ex Q E in E L habebit maiorem rationem, quam A E cubus ad A D cubũ, idest, quam E H ad D G; ergo factum ex B D in D I in D G superabit factum ex Q E in E L in E H, idest plano solidum applicatũ quatuor ex quinque partibus dati plano plani superabit plano solidum, quod applicatur parti minori, quam sint quatuor ex quinque partibus dati plano plani; cum autem etiam demonstratum sit superare id, quod applicatur parti maiori, quam sint quatuor ex quinque

par-

partibus simili existente defectu patet esse omnium maximum eorum, quæ applicari possint, quod proposuimus demonstrandum.

SCHOLIVM.

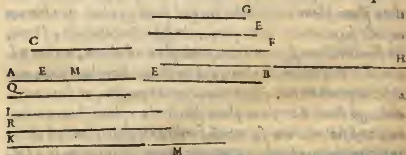
SI dentur duæ lineæ, quarum altera gerat vicem rationalis, altera verò possit datum plano-planum; & quæratur quinta proportionalis posita rationali prima; & ea, quæ potest datum plano planum secunda, quinta inuenta erit similis dato plano plano, cuius segmenta similia erunt segmentis dati plano plani, & prima trium medio loco proportionalium inter rationalem, et segmentum similis dato plano plano erit similis ei, quæ potest quadrato quadratum æquale segmento dati plano plani; & si fiat, vt rationalis ad hanc, ita similis reliquo segmento dati plano plani ad aliam, erit hæc vltimo loco inuenta similis plano solido applicato dato plano plano cum defectu quadrato cubi. Quare in id recidet quæstio, vt data rationali, & simili dato plano plano similis dato plano-plano ita secetur, vt si fiat alterum segmentũ similis dato plano plano ad aliam in ratione subquadruplicata rationis, quam habet rationalis ad alterum segmentum hæc sit omnium maxima. Hinc eadem superior propositio per lineas homologas data rationali aptè proponitur, & demonstratur sequenti propositione; ideò sit.

Eadem propositio proposita, & demonstrata per lineas homologas data rationali.

Datis duabus rectis lineis, quarũ altera se habeat loco rationalis, altera verò secta sit vtcunque, & alterum ipsius segmentum habeat ad aliam rationem subquadruplicatam eius, quam habet ra-

rationalis ad alterum segmentum. Hæc erit omnium maxima, quando segmentũ, ad quod refertur rationalis fuerit æquale quintæ parti datæ rectæ, vel fuerit subquadruplum alterius segmenti.

SIT data rationalis C, & altera A B, quæ prius secetur in M, vt A M sit quinta pars totius A B, & ideò subquadrupla ipsius B M. Secundo vtcunque in E; ita vt B E sit maior, aut minor ipsa B M, & inter C, & A M sint tres medio loco continuè pro-



portionales G, & E & F; ita vt sint quinque continuè proportionales C, & G, & E, & F, & A M; vt autem C ad G, ita fiat B M ad H; quia C ad G habet rationem subquadruplicatam eius, quam habet ad A M habebit B M ad H rationem subquadruplicatam eius, quam habet C ad A M. Supponantur iterum inter C, & A E tres mediæ continuè proportionale Q & I, & R, ita vt sint quinque continuè proportionales C, & Q, & I, & R, & A E; vt autem C ad Q, ita fiat B E ad K habebit C ad Q subquadruplicatam rationem eius, quam habet C ad A E; Quare B E ad K habebit rationem subquadru-

dru-

druplicatam eius, quam habet C ad A E; & quia A M est subquadrupla ipsius B M. Dico H superare K. Fiat, vt G ad H, ita Q ad M, & considerentur tres quantitates Q & G, & H, item aliæ tres Q & M, & K; erit ratio Q ad H composita ex ratione Q ad G, & G ad H; ratio verò Q ad K erit composita ex ratione Q ad M, & M ad K; & quia ab eadem C sunt duæ series continuè proportionalium C, & G, & E, & F, & A M, item C, & Q, & I, & R, & A E, habebit Q ad G subquadruplicatam rationem eius, quam habet A E ad A M, vt colligi potest ex lemmate secundo. Quia verò, vt C ad Q, ita facta est B E ad K, erit vt C ad B E, ita Q ad K, item quia, vt C ad G, ita facta est B M ad H, erit, vt C ad B M, ita G ad H; sed, vt G ad H, ita Q ad M; ergo Q ad M erit, vt C ad B M, &, vt Q ad K, ita C ad B E; ergo M ad K erit, vt B M ad B E; sed, per lemma decimum quartum, B M ad B E habet maiorem rationem, quam sit ratio subquadruplicata A E ad A M, idest quam sit ratio Q ad G, & G ad H habet eandem rationem, quam habet Q ad M; ergo per Analogiam perturbatam Q ad K habebit maiorem rationem, quam Q ad H; ergo H superat K, quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

IAM expeditæ sunt propositiones de applicationibus figurarum deficientium figura data specie vsq; ad solido solida, ex quibus euidens fit id, quod in Isagogicis diximus gradum figuræ applicandæ denominare multitudinem partium, in quas diuidenda est magnitudo, cui fit applicatio, & gradum magnitudinis, cui fit

fit applicatio numerare partes, quas occupat applicata magnitudo deficiens figura data specie. Et hoc generaliter verum est; possunt enim ad solido solida, & ulteriora hæ propositiones produci eadem methodo, qua superiores propositiones demonstratæ sunt; Quamobrem earum tantum propositionum, quæ ad solido solida spectant Elenchum subdam.

ELENCHVS.

Propositionum, quæ spectant ad applicationem solido solidorum datæ magnitudini deficientium solido solido dato specie.

Maximum solido solidum, quod applicari possit datæ lineæ deficiens solido solido dato specie est id, quod sextæ parti datæ lineæ applicatur.

Eadem propositio data rationali per lineas homologas.

Duabus datis rectis lineis, quarum altera sit rationalis non secta, altera verò secta vtcunque, & fiat alterum segmentum sectæ ad aliam in ratione quintuplicata eius, quam habet rationalis ad alterum segmentum, hæc erit omnium maxima, quando segmentum, ad quod refertur non secta fuerit alterius quintuplum.

Maximum solido solidum, quod applicari possit dato plano deficiens solido solido dato specie est id, quod applicatur duabus ex sex partibus dati plani, seù tertiæ parti dati plani.

Eadem

Eadem propoſitio data rationali per lineas homologas.

Hæc propoſitio, vt demonſtretur per lineas homologas data rationali conuenit cum ea, quæ demonſtratur propoſitione ſecunda; nam ſi dato plano aſſimiletur linea, erit ſolido ſolidum ſimile ſolido; maximum autem ſolidum, quod applicatur datæ lineæ deficiens ſolido dato ſpecie eſſe id, quod applicatur tertiæ parti datæ lineæ docuimus propoſitione ſecunda, cui reſpondet propoſitio per lineas homologas.

Maximum ſolido ſolidum, quod applicatur dato ſolido deficiens ſolido ſolido dato ſpecie eſt id, quod applicatur tribus ex ſex partibus, ideſt dimidio dati ſolidi.

Huic reſpondet per lineas homologas data rationali, ea propoſitio, quæ reſpondet propoſitioni primæ; nam ſi ſolido aſſimiletur linea, ſolido ſolido erit ſimile planum.

Maximum ſolido ſolidum, quod applicatur dato plano plano deficiens ſolido ſolido dato ſpecie, eſt id, quod applicatur quatuor ex ſex partibus dati plano plani, ideſt duabus ex tertijs partibus dati plani.

Huic

Huic reſpondet propoſitio tertia cum ſua propoſitione per lineas homologas; nam ſi plano plano aſſimiletur planum erit ſolido ſolidum ſimile ſolido, & maximum ſolidum, quod applicatur plano deficiens ſolido ſimili dato demonſtratum eſt propoſitione tertia eſſe illud, quod applicatur duabus tertijs partibus dati plani.

Maximum ſolido ſolidum, quod applicatur plano ſolido deficiens ſolido ſolido dato ſpecie eſt id, quod applicatur quinque ex ſex partibus dati plano ſolidi.

Eadem propoſitio per lineas homologas proponitur.

Datis duabus rectis lineis, quarum altera ſit rationalis non ſecta, altera verò ſecta vtcunque, & alterum ipſius ſegmentum habeat ad aliam rationem ſubquintuplicatam eius, quam habet rationalis ad alterum ſegmentum. Hæc erit omnium maxima, quando ſegmentum, ad quod refertur rationalis fuerit æquale ſextæ parti datæ rectæ, vel fuerit alterius ſegmenti ſubquintuplum.

Et conſtanti hoc ordine procedunt altiorum magnitudinum applicationes in infinitum, & demonſtrationes omnibus obuiæ erunt, qui ſuperiora intellexerint.

FINIS.

